1 2 3 4 5 6

Stærðfræði

Kennsluleiðbeiningar

Kennsluleiðbeiningar

8-tíu

NÁMSGAGNASTOFNUN
4. mars 2008

Átta – tíu

Stærðfræði 6
Kennsluleiðbeiningar

Ritstjóri: Hafdís Finnbogadóttir

1. útgáfa 2008
Námsgagnastofnun
Reykjavík

Umbrot og útlit: Námsgagnastofnun

Efnisyfirlit

Tölfræði

Inntak
Markmið að nemendur:

- Hafi séð dæmi um hvernig töluleg gögn hafa verið notuð til að gefa rangar og misvísandi upplýsingar.
- Geti safnað tölfræðilegum upplýsingum, flokkað þær og valið framsetningu á niðurstöðum.
- Þekki og skilji algeng hugtök sem notuð eru til að lýsa gagnasöfnum, svo sem tíðni, hlutfallstíðni, meðaltal, miðgildi og tíðasta gildi, og geti fundið þessar stærðir í gefnum gagnasöfnum.
- Kynnist notkun gagnagrunna og töflureikna við úrvinnslu og framsetningu gagna.

Aðferðir
Markmið að nemendur:

- Geti ályktað og tjáð sig um tölfræðilegar upplýsingar og metið ályktanir sem dregnar eru af slíkum gögnum.
- Geti útskýrt bæði munnlega og skriflega hugtök, aðferðir, niðurstöður og eigin lausnir á verkefnum og notað skýringarmyndir og tákn eftir því sem við á.
- Geri sér grein fyrir hvernig beita má stærðfræðilegum aðferðum í daglegu lífi, hvaða aðferðir úr stærðfræði henta best hverju sinni og séu vanir að nota stærðfræði á öðrum sviðum.

Umfjöllun um inntak og vinnubrögð

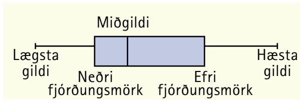
Í fréttum og upplýsingamiðlum er tölfræði mikið notuð þegar settar eru fram upplýsingar. Allir þjóðfélagsþegnar þurfa að geta metið slíkar upplýsingar og lesið úr þeim til að geta tekið þátt í umræðum í lýðræðissamfélagi. Það kemur fyrir að tölfræðilegar upplýsingar eru settar fram á villandi hátt, meðvitað eða ómeðvitað, og því þurfa allir að vera gagnrýnir í lestri sínum á þær.

Ákveðnar aðferðir hafa verið þróaðar við öflun upplýsinga, úrvinnslu þeirra, framsetningu og túlkun. Mikilvægt er að gera mjög skýrt grein fyrir því hvernig upplýsinga er aflað til þess að hægt sé að meta marktækni niðurstaðna. Oft er það þannig að óskað er svara við ákveðinni spurningu. Til þess að fá svör við henni þarf iðulega að búa til fleiri spurningar og hugsa fyrir því hvort meta eigi svörin út frá einhverjum breytum eins og kyni, aldri eða búsetu. Þegar kanna á viðhorf, hegðun eða aðstæður manna er algeng leið að nota spurningalista þar sem fyrst er aflað grunnupplýsinga sem nota á við samanburð á hópum og síðan eru settar fram spurningar um efnið sem leitað er upplýsinga um. Við gerð spurningalista þarf að varast að hafa spurningar leiðandi og svarmöguleikar verða að vera skýrir.

Annað atriði, sem mikilvægt er að huga að, er hverja á að spyrja. Það skiptir miklu máli að úrtak sé valið þannig að það gefi raunhæfa mynd af þýðinu. Sjaldnast er hægt að afla upplýsinga um allt þýðið og oft er þá notað tilviljunarkennt úrtak. Margir leiðir má fara við að velja það en hér á landi er einna algengast að velja tiltekinn fjölda manna úr þjóðskrá, t.d. 800, 1000 eða 1200. Ef búseta er þýðingarmikið atriði er landinu skipt í svæði og valdir fulltrúar í hlutfalli við mannfjölda á hverjum stað. Hugmyndin um tilviljunarkennt úrtak byggist á að allir í þýðinu hafi jafna möguleika á að lenda í úrtakinu. Þegar um fámennan hóp er að ræða má skrifa niður nöfn allra, setja í hatt og draga. Þegar fjöldinn er meiri er byggt á sama lögmáli en þá eru oft notuð tölvuforrit til að velja úrtakið. Við gagnaöflun skiptir nákvæmni miklu máli og nauðsynlegt er að skrá niðurstöður skipulega. Því getur verið hentugt að hanna skráningarblöð og/eða skrá niðurstöður í tíðnitöflu.

Fjöldi ferða	Skráning	Tíðni	Samanlögð tíðni
0 – 3	[illegible]	4	4
4 – 7	[illegible]	10	14
8 – 11	[illegible]	25	39
12 – 15	[illegible]	35	74
16 – 19	[illegible]	12	86
f > 19		0	86

Tölfræðilegar niðurstöður má setja fram á margvíslegan hátt. Það fer eftir eðli gagnanna hvaða leið hentar best hverju sinni. Töflur henta vel til að sýna nákvæmlega fjölda í hverjum flokki meðan línurit eru heppileg til að sýna breytingar á tilteknu tímabili. Við samanburð hentar oft vel að nota hlutfallstíðni. Hún er oftast gefin í prósentum og það einfaldar að meta og bera saman. Til að velja leið við framsetningu þarf að taka mið af rannsóknarspurningu en einnig skiptir máli hvers konar gögnum hefur verið safnað. Töluleg gögn eru ýmist stök gildi eða samfelldar breytur. Eðli gagnanna ræður hvaða myndrit má nota til að sýna þau. Oft eru töluleg gögn það umfangsmikil að þau þarf að flokka. Þá verður að gæta þess að flokkarnir nái yfir jafnstór bil og séu hæfilega margir til að mögulegt sé að ná yfirsýn yfir niðurstöður. Í tíðnitöflum eru stundum dálkar sem sýna samanlagða tíðni eða samanlagða hlutfallstíðni. Þeir eru góðir til að fá heildarmynd fljótt. Þar er lagt saman allt sem á undan er komið og því sést hve margir eða hve stórt hlutfall hefur verið unnið með.



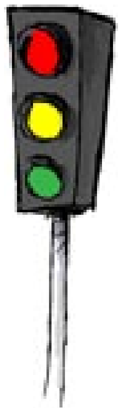
Laufrit og rammarit eru myndrit sem henta vel ef skoða á dreifingu gagna ekki síst miðsækni. Með því að horfa á laufrit má sjá skýrt hæsta og lægsta gildi og hve þétt gildin raðast.

Rammarit eru hentug til að sýna hvernig helmingur gagnanna raðast út frá miðgildi og hver dreifingin er. Rammi er markaður um 50% gagnanna og segir það oft mikið um safnið hvar miðgildið er innan rammans.

Í tölfræði hafa verið þróaðar ýmsar leiðir til að einfalda lestur og mat á gögnum. Miðsæknihugtök eru sett fram sem eitt talnagildi og þeir sem góðan skilning hafa fá þá mynd af gögnum út frá þeirri tölu. Meðaltal er fundið með því að leggja saman öll gildin og deila með fjölda þeirra. Þegar hvert gildi hefur mismunandi vægi er talað um að finna þurfi vegið meðaltal. Þá er miðað við hlutfall hvers gildis þegar meðaltal er reiknað. Ef gögn hafa verið flokkuð er í útreikningum á meðaltali miðað við miðju í hverjum flokki og hún margfölduð með tíðni hvers flokks áður en fundin er summa og deilt með fjölda gilda. Miðgildi segir til um hvaða gildi er í miðju safninu meðan tíðasta gildi segir til um hvaða gildi kemur oftast fyrir. Tíðasta gildi getur verið fleiri en ein stærð ef fleiri en eitt gildi koma oftast fyrir. Ef upplýsingar liggja fyrir um öll miðsæknihugtökin, meðaltal, miðgildi og tíðasta gildi, gefa þær mynd af helstu einkennum gagnasafnsins. Ef mikill munur er á meðaltali og miðgildi bendir það til þess að einhver jaðargildi skekki niðurstöður. Ef hins vegar meðaltal, miðgildi og tíðasta gildi eru tölur af svipaðri stærð gefur það til kynna að dreifing gagnanna sé mest um miðju safnsins.

Kennsluhugmyndir

Meginviðfangsefni kaflans eru vinnubrögð við öflun, framsetningu og túlkun gagna. Í upphafi er því gott að ræða um hvernig tölfræðilegar niðurstöður eru birtar og túlkaðar. Gaman er taka með nýlegar kannanir sem fjallað hefur verið um í fjölmiðlum og ræða hvernig niðurstöður þeirra eru túlkaðar. Á fyrstu blaðsíðu kaflans eru tvö dæmi um misskilning á prósentuhugtakinu og síðan eitt þar sem miðað er við hæð (lengd) en ekki flatarmál og því ýkist verðmunur upp í myndritinu. Þessi dæmi er kjörið að nemendur vinni í litlum hópum sem geri síðan grein fyrir niðurstöðum sínum og umræðum.



Í kaflanum eru mikið notuð gögn um umferð og akstur. Þetta viðfangsefni er valið með það í huga að í 10. bekk eru oft einhverjir byrjaðir að læra á bíl og því áhugi á málefninu. En jafnframt er þetta svið sem mikilvægt er að allir þekki eitthvað til og geri sér grein fyrir hættum í umferðinni. Verkefni henta mörg ágætlega fyrir 2–3 nemendur að vinna saman en einnig getur hver unnið fyrir sig. Á blaðsíðum 5 og 6 er skoðað hvað þarf að hafa í huga við undirbúning kannana og gagnaöflun. Þar eru aðalatriðin að velta fyrir sér gerð spurninga og leggja áherslu á að svarmöguleikar séu skýrir. Ekki má gleyma að huga að því að niðurstöður hjálpi til við að svara meginspurningu könnunarinnar. Á blaðsíðu 7 er sjónum beint að hönnun eyðublaðs sem nota má til skráningar. Gott getur verið að skoða nokkur dæmi frá nemendum og ræða kosti og galla eyðublaðanna. Í tengslum við dæmi 11 er kjörið að skoða spurningu dagsins frá einhverjum fjölmiðli og bera saman niðurstöðu fjölmiðilsins og niðurstöðu sem fæst ef spurt er í nemendahópnum. Það gefur líka tilefni til að ræða um hvernig nemendur skilja spurninguna. Í dæminu er gefin spurningin: Ertu fylgjandi 10 ára skólaskyldu á Íslandi? En hvað felst í svarinu nei við spurningunni? Í svarinu getur til dæmis falist að viðkomandi sé hlynntur 14 ára skólaskyldu, 5 ára skólaskyldu eða alveg á móti skólaskyldu. Umræður ættu því að geta orðið líflegar, ekki síst um gildi svona kannana og hvaða upplýsingar þær gefa.

Í dæmi 12–13 er unnið með töflu um tjón hjá ungum ökumönnum. Nemendum er ætlað að nýta upplýsingar og setja þær fram út frá ólíkum viðmiðunum sem hlutfallstölur. Það ætti að beina sjónum þeirra að því að vinna má úr sömu gögnum á ólíkan hátt eftir því við hvaða spurningum er leitað svara. Í þjóðfélaginu er því gjarnan haldið fram að hækka eigi bílprófsaldur því ungir ökumenn valdi svo mörgum tjónum. Í dæmi 14 gefst nemendum tækifæri til að bera gerðir tjóna hjá heildarhópi ökumanna saman við unga ökumenn.

Myndrit eru oft notuð við framsetningu gagna. Gerð gagna ræður miklu um hvaða myndræna framsetning kemur til greina. Á blaðsíðu 9 er sjónum sérstaklega beint að hugtökunum stök gildi og samfelldar breytur. Það eru afgerandi hugtök fyrir hvaða myndrit hentar að nota. Nemendur þurfa líka að æfa sig í að túlka myndrit og ræða hvaða upplýsingar felast í þeim. Því gæti verið gott að þeir bæru saman svör sín við dæmum 17 og 18.

Umfangsmikil gögn þarf að flokka til að auðvelda fólki að fá yfirsýn yfir þau. Við flokkun þarf að gæta þess að flokkar nái yfir jafnstór talnabil. Oft styður það við skilning að taka nokkra flokka saman og þá er hugtakið samanlögð tíðni gagnlegt. Dæmi 19–21 eru hugsuð sem æfingadæmi í aflestri á flokkuðum upplýsingum, í að flokka upplýsingar og skoða áhrif þess hvernig er flokkað. Því getur verið gott að nemendur ræði allir saman eða í litlum hópum um svör sín við dæmi 21.

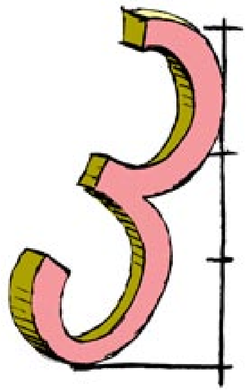
Hlutfallstíðni og samanlögð hlutfallstíðni eru meginhugtök á blaðsíðu 12–13. Þar er haldið áfram að bæta dálkum við töflu. Töflurnar er kjörið að vinna í töflureikni. Þá má líka setja upplýsingarnar fram á einfaldan hátt myndrænt á ólíku formi. Tilvalið er að nemendur afli frekari upplýsinga, til dæmis úr eigin sveitarfélagi.

Áhersla er oft lögð á miðsæknihugtök þegar gagnasafn er greint. Oftast er mikil áhugi á að vita á hvaða bili meirihluti gagna liggur og þá skipta hugtök eins og meðaltal, miðgildi og tíðasta gildi miklu máli. Nemendur vinna með hugtakið meðaltal í dæmum 27–31. Þar eiga þeir að skoða mismunandi aðstæður þar sem reikna á meðaltal. Þeir þurfa bæði að finna meðaltal þar sem gögn hafa verið flokkuð og einnig þar sem meðaltal hefur verið fundið í misstórum hópum og þeir eiga síðan að finna meðaltal hópanna. Sjálft hugtakið vegið meðaltal er ekki notað en unnið með hugmyndina sem það byggist á.

Hugtökin miðgildi og tíðasta gildi er tekin fyrir. Miðgildi er meginhugtak þegar gera á rammarit. Þægilegt er að setja upplýsingar í laufrit þegar finna á miðgildi.
Beina þarf sjónum nemenda að fimm lykiltölum rammarita og hvað má lesa úr þeim.

Tugir	Einingar
km	km
4	2,3,4,4,5,5,5,6,7
5	1,2,3,3,3,6,6,6,7,7,8,9,9,9,9,9
6	0,0,0,0,1,1,1,5,5,5,5,5,5,8,9
7	1,5,7,9

Við lok kaflans er vel til fallið að nemendur geri eigin kannanir eða finni sjálfir gagnasöfn til að vinna úr. Þeir geta til dæmis skoðað umferðarmenningu í eigin sveitarfélagi eða annars staðar í heiminum. Nemendahópurinn getur allur unnið saman við stór gagnasöfn og skoðað ólíka þætti. Kjörið er að nota tölvur við úrvinnslu og jafnvel gagnaöflun.



Algebra og jöfnur

Inntak
Markmið að nemendur:
- Þekki leiðir til að sýna samband stærða með orðum, jöfnum, með því að setja gildi í töflur og teikna gröf.
- Þekki einkenni á jöfnu beinnar línu og geti fundið hallatölu beinnar línu og skurðpunkta hennar við ása hnitakerfisins.
- Geti leyst saman tvær fyrsta stigs jöfnur með tveimur óþekktum stærðum.
- Þekki einkenni á annars stigs jöfnum og hafi kynnst því hvernig leysa má annars stigs jöfnur með þáttun.
- Geti þáttað og margfaldað saman liðastærðir.

Aðferðir
Markmið að nemendur:
- Hafi öðlast færni í að nota táknmál stærðfræðinnar til að skrá samband stærða.
- Geti notað tölvuforrit til að teikna gröf jafna og finna lausnir þeirra.
- Geti notað algebru til þess að leysa viðfangsefni úr daglegu lífi.

Umfjöllun um inntak og vinnubrögð

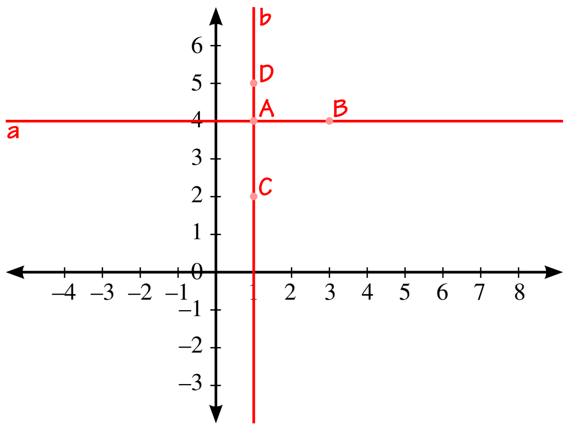
Algebra fær töluvert vægi í þessari síðustu bók fyrir unglingastig. Samkvæmt aðalnámskrá er lögð áhersla á að nemendur hafi við lok grunnskóla kynnst ýmsum hliðum algebrunnar.

Gert er ráð fyrir að nemendur hafi unnið með mynstur í því skyni að segja til um framhaldið og finna almenna reglu. Þeir eiga að átta sig á einfaldri notkun bókstafa í stærðfræði og þar er lögð áhersla á hvernig lýsa má sambandi stærða bæði með því að skrá stæður og jöfnur. Mikil áhersla er á að nemendur geri sér grein fyrir muninum á stæðu og jöfnu. Einnig eiga nemendur að átta sig á undirstöðureglum algebru og að þar gilda sömu reiknireglur og við almennan reikning með tölum. Jafnframt þurfa þeir að kunna að fara með táknasamstæður sem samsettar eru úr tölum og eða bókstöfum með venjulegum reikniaðgerðum.

Viðfangsefnum þessa kafla má skipta í meginatriðum í fernt. Í fyrsta hluta kaflans er áhersla lögð á hvernig lýsa má sambandi stærða með því að setja gildi í töflur, með jöfnum, með því að teikna gröf og/eða lýsa því með orðum. Fyrst og fremst er fengist við föll sem skrá má með jöfnu beinnar línu. Lögð er áhersla á að nemendur geti farið frá einu formi yfir á annað. Þeir þurfa að geta teiknað graf út frá jöfnu eða töflu og skráð jöfnu út frá grafi, töflu eða lýsingu með orðum. Þegar notuð eru tölvuforrit til að teikna gröf geta nemendur einbeitt sér að því að skoða hvernig grafið breytist þegar ýmsum liðum jöfnunnar er breytt. Þeir geta teiknað mun fleiri gröf en þegar teiknað er í höndunum. Engu að síður er nauðsynlegt að nemendur átti sig á því að með því að setja tiltekið x-gildi inn í jöfnu fá þeir tiltekið y-gildi og að þessi tvö gildi eru hnit tiltekins punkts í hnitakerfinu. Með því að setja inn fleiri x-gildi geta þeir fundið hnit fleiri punkta sem raðast saman og mynda graf jöfnunnar. Mikilvægt er líka að nemendur átti sig á því að í raun má setja hvaða rauntölu sem er inn í stað x nema annað sé tekið fram. Þegar eingöngu eru settar inn heilar tölur og graf teiknað út frá því þá erum við í raun að gefa okkur að grafið sé samfellt Nemendur þurfa að fá tækifæri til að sannreyna í einhverjum tilvikum að svo sé með því að prófa að setja inn mörg mismunandi gildi fyrir x sem liggja t.d. á milli tveggja heilla talna. Á þetta við um bæði fyrsta og annars stigs jöfnur.

Í kaflanum er töluverð áhersla lögð á jöfnu beinnar línu, hallatölu línu og skurðpunkt línu eða grafs við y-ás. Bent er á að finna má hallatöluna og skurðpunktinn við y-ás með því að skoða jöfnuna og lesa af grafinu. Einnig er bent á að reikna má út hallatölu beinnar línu ef tveir punktar á henni eru þekktir og að þegar hallatalan hefur verið fundin má setja hana inn í jöfnu beinnar línu ásamt öðrum punktinum og finna þannig skurðpunkt við y-ás. Þetta getur verið nauðsynlegt ef jafna línunnar er ekki þekkt og erfitt reynist að lesa skurðpunktinn og hallatöluna af grafinu.

Beinar línur sem liggja samsíða ásum hnitakerfisins hafa sérstöðu.



Lína sem er samsíða x ásnum hefur hallatöluna 0. Það má reikna út með því að setja tvo punkta á slíkri línu inn í regluna fyrir hallatölu. Punktarnir A(1,4) og B(3,4) liggja báðir á línu samsíða x-ásnum. Ef þeir eru settir inn í regluna fyrir hallatölu fæst $\frac{4-4}{3-1} = \frac{0}{2} = 0$.

Ef hallatalan 0 er sett inn í jöfnu beinnar línu ásamt skurðpunktinum við y ás má sjá að jafnan verður $y = 0 \cdot x + 4$ eða $y = 4$.

Ekki er hins vegar hægt að reikna út hallatölu línu sem er samsíða y-ás. Ef t.d. punktarnir C(1,2) og D (1,4) sem liggja á línu samsíða y-ás sem sker x-ás í punktinum (1,0) eru settir inn í regluna fyrir hallatölu fæst $\frac{5-2}{1-1} = \frac{2}{0}$

Hér þarf að deila með núll sem er ekki hægt og því hefur lína sem er samíða y-ás enga hallatölu. En allir punktar á línunni hafa sama x-gildi og y-gildið getur verið hvaða tala sem er, því má tákna línuna með því að gefa upp x-gildið. Tákna má línuna sem punktarnir C og D liggja á með jöfnunni $x = 1$. Þetta getur verið nauðsynlegt að taka til umræðu með nemendum.

Í kaflanum kynnast nemendur því hvernig leysa má saman tvær fyrsta stigs jöfnur með tveimur óþekktum stærðum. Þetta er í fyrsta sinn sem þetta er tekið fyrir á formlegan hátt þó nemendur hafi áður fengist við verkefni þar sem þeir hafa leyst slík verkefni með því að prófa sig áfram. Kynntar eru þrjár leiðir til að leysa saman tvær jöfnur, að teikna gröf jafnanna og finna þannig skurðpunkt þeirra, innsetning og samlagning. Orðið jöfnuhneppi, sem margir kennarar þekkja um tvær jöfnur með tveimur óþekktum stærðum, er ekki notað enda kemur það ekki fyrir í námskrá. Lögð er áhersla á að þegar tvær jöfnur með tveimur óþekktum stærðum eru leystar saman er í raun verið að finna hnit skurðpunkts á gröfum þeirra eða þegar x- og y-gildi þeirra eru þau sömu. Mikilvægt er að nemendur átti sig á að þó í sjálfu sér megi fara hvaða leið sem er við að leysa saman tvær jöfnur þá er rétt að skoða jöfnurnar vel áður en hafist er handa og velta fyrir sér hvað leið hentar best í hverju tilviki fyrir sig.

Á blaðsíðu 29–30 eru dæmi þar sem nemendur fá æfingu í að þátta og margfalda saman liðastærðir. Farið verður meira í þetta efni í seinni algebrukafla bókarinnar en sett er inn upprifjun og æfing hér, vegna þess að á næstu blaðsíðum á eftir er fengist við annars stigs jöfnur og gefin dæmi um hvernig leysa má sumar þeirra með þáttun.

Við lok kaflans eru annars stigs jöfnur skoðaðar. Enn og aftur er bent á mikilvægi þess að nota tölvuforrit við að teikna gröf jafna. Á það ekki síst við um annars stigs jöfnur því erfitt er að teikna gröf þeirra af nákvæmni. Nemendur kynnast því hvernig leysa má einfaldar annars stigs jöfnur með þáttun en ekki er farið djúpt í efnið enda er ekki gerð krafa um slíkt í námskrá.

Á síðustu blaðsíðu kaflans eru nokkur dæmi sem nemendur geta leyst með því að setja upp jöfnur með einni eða tveimur óþekktum stærðum.

Kennsluhugmyndir

Eins og fram hefur komið má skipta efni kaflans í fjögur meginviðfangsefni. Á blaðsíðum 19–23 fást nemendur fyrst og fremst við að lýsa má sambandi stærða með því að setja gildi í töflur, með jöfnum, með því að teikna gröf og/eða lýsa því með orðum. Gott getur verið að byrja á því að láta nemendur leysa verkefni 1–3 í pörum eða litlum hópum. Í umræðum mætti síðan ræða hvenær gott er að nota töflu, graf eða jöfnu til að lýsa sambandi stærða og við lausn viðfangsefna. Gott er að undirstrika með nemendum að sérhverju x-gildi tengist ákveðið y-gildi og saman mynda þessi gildi talnapar sem stendur fyrir hnit punkts í hnitakerfinu. Verkefni 4 og 5 eru ágæt verkefni fyrir nemendur að vinna hver í sínu lagi til að tryggja að þeir nái tökum á að lýsa sama sambandinu á mismunandi vegu og auk þess að reyna að finna því stað í daglegu lífi. Æskilegt er að kennari hafi á reiðum höndum

NÁMSGAGNASTOFNUN 2008 – Kennsluleiðbeiningar – 09847

einhver dæmi úr daglegu lífi sem lýsa mætti með eins eða svipuðum samböndum og þeim sem lýst er í dæmi 4 og 5. Dæmi 6 gætu nemendur síðan leyst í pörum eða litlum hópum.

Verkefnin á blaðsíðu 21 ættu að vera nemendum kunnugleg. Þegar þeir hafa leyst verkefnin gætu þeir spreytt sig á að teikna gröfin með því að nota tölvuforrit. Þá þurfa nemendur að finna jöfnu grafanna en einnig má einfaldlega setja x- og y-gildin upp í dálka í töflureikni og teikna línurit út frá þeim upplýsingum. Kennurum er bent á forritið *Flott föll* en einnig má finna einföld smáforrit á netinu til að teikna föll eins og forritið *Grapher* sem finna má undir algebru á vefnum *National Library of Virtual Manipulatives* (http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html). Einnig má benda á forritið *Geogebra* sem nálgast má ókeypis á netinu og auðvelt er að nota til að teika gröf (http://www.geogebra.org).

Áður en nemendur hefjast handa við að leysa verkefnin á blaðsíðu 22–23 er æskilegt að taka jöfnu beinnar línu til skoðunar. Fá þarf fram hjá nemendum hvernig lesa má hallatölu grafsins út úr jöfnunni og skurðpunkt þess við y-ásinn. Einnig hvernig nota má hana til að finna punkta á grafi jöfnunnar og teikna gröf út frá henni. Rétt er að ræða hvaða leiðir má fara til að finna hallatölu grafs ef hún er ekki þekkt en búið er að teikna grafið og einnig hvernig finna má hallatöluna út frá punktum á grafinu. Að lokum þarf svo að ræða hvernig hægt er að nota hallatölu og einn punkt á grafi til að finna skurðpunkt þess við y-ás. Þetta eru atriði sem tekin eru fyrir í glósubókum á blaðsíðum 22–23 og þarf að skoða vel með nemendum.

Á blaðsíðum 24–28 kynnast nemendur ýmsum leiðum til að leysa saman tvær fyrsta stigs jöfnur með tveimur óþekktum stærðum. Verkefnin á blaðsíðu 24 eru eins konar aðdragandi og gert er ráð fyrir að nemendur leysi þau verkefni með því að prófa sig áfram. Í verkefni 19 geta nemendur til dæmis rakið sig áfram eða aftur á bak út frá þeim upplýsingum sem gefnar eru.

S S S V V 11 100 kr.
S S V V V 9400 kr.

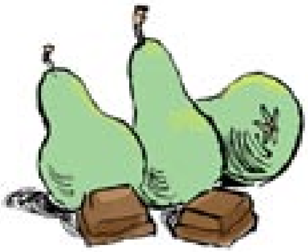
Ef einu pari af stígvélum er skipt út fyrir vasaljós lækkar verðið um 1700 kr.
Stígvélin eru því 1700 kr. dýrari en vasaljósið.

S V V V V Eitt par og fjögur vasaljós kosta því 7700 kr.
V V V V V Fimm vasaljós kosta því 6000 kr. eða 1200 kr. stykkið.

Einnig má fara í hina áttina og finna verð á fimm pörum af stígvélum.

S S S S S Fimm pör af stígvélum kosta 14 500 kr. eða 2900 kr. stykkið.
S S S S V 12 800 kr. Ef einu vasaljósi er skipt út fyrir stígvél hækkar verðið um 1700 kr.
S S S V V 11 100 kr.
S S V V V 9400 kr.

Verkefni 20 er óformlegur undirbúningur undir það að leysa megi saman tvær jöfnur með því að teikna gröf þeirra og finna hvar þau skerast. Þegar nemendur hafa fundið nokkra möguleika á því að verðleggja súkkulaði og perur þannig að tvö súkkulaðistykki og þrjár perur kosti 290 krónur þá geta þeir skráð niðurstöður í hnitakerfi og séð að punktarnir liggja á beinni línu. Þeir geta notað línuna til að finna fleiri möguleika þó erfitt geti verið að lesa hárnákvæmar lausnir af henni. Nemendur skrá síðan punkta í sama hnitakerfi fyrir sambandið *súkkulaðistykki er 30 krónum dýrara en pera*. Hér eru einnig margir möguleikar og má lýsa sambandinu með beinni línu. Ef hins vegar á að finna lausn sem uppfyllir bæði þessi skilyrði er bara ein lausn til og hana má lesa af gröfunum þar sem þau skerast. Nemendur enda síðan á því að skrá jöfnur fyrir hvort samband fyrir sig. Æskilegt er að nemendur vinni þetta verkefni í pörum og að það sé síðan tekið til sameiginlegrar umræðu. Verkefni 21 er hliðstætt en þar byrja nemendur á að setja fram jöfnur og teikna síðan gröf þeirra og finna þannig lausnina eða skurðpunkt grafanna.



Þegar fengist er við lausnir á jöfnum með tveimur óþekktum stærðum þarf oft að einangra aðra óþekktu stærðina. Þegar búin er til gildistafla og teiknuð gröf er oft gott að byrja á því að umskrá jöfnuna og einangra y. Verkefni 22 er æfing í því. Nemendur ættu síðan að geta leyst verkefni 23 og 24 hver fyrir sig en mikilvægt er að taka til umræðu það sem fjallað er um í glósubókinni, þ.e. að þegar jöfnur eru leystar saman er verið að finna hvenær þær eru jafngildar eða skurðpunkt grafa þeirra.

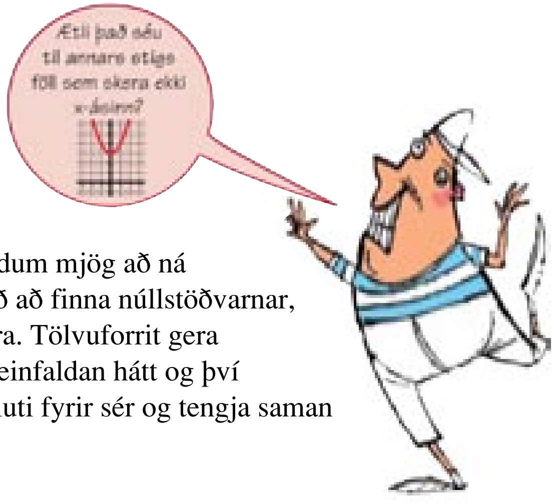
Á blaðsíðum 26 og 27 er kynnt hvernig nota má innsetningu og samlagningu við að leysa saman tvær jöfnur með tveimur óþekktum stærðum. Nemendur þurfa að lesa textana í glósubókinni vel. Gott er að þeir spreyti sig á því sjálfir og prófi síðan að fylgja leiðbeiningunum og leysa dæmin. Þeir þurfa líka að átta sig á að þeir fá sömu lausn hvort sem notuð er teiknilausn, innsetning eða samlagning ef um sömu jöfnur er að ræða, eins og t.d í dæmi 26 og 29. Þá gefst líka tækifæri til að ræða í hvaða tilvikum ein leið hentar betur en aðrar. Á blaðsíðu 28 eru dæmi þar sem nemendur fá frekari æfingu í að leysa saman tvær jöfnur með tveimur óþekktum stærðum og verður kennari að meta hvort ástæða sé til að allir nemendur leysi öll dæmin.

Margföldun og þáttun liðastærða er meginviðfangsefnið á blaðsíðum 29 og 30. Hér er fyrst og fremst um upprifjun að ræða og æskilegt er að nemendur glími við verkefnin sjálfstætt eða tveir og tveir saman. Dæmi 39 og 40 gefa tilefni til að beina sjónum nemenda að samhengi milli talna og stuðla í liðastærðum og talna og formerkja í svigum. Þetta atriði er tekið aftur fyrir í seinni algebrukafla bókarinnar.

Á blaðsíðum 31–34 er meginviðfangefnið annars stigs jöfnur og nemendur kynnast því hvernig leysa má einfaldar annars stigs jöfnur með þáttun eða með því að finna ferningsrót. Hópverkefnið á blaðsíðu 45 er mikilvægur undanfari vinnunnar en þar skoða nemendur muninn á fyrsta og annars stigs jöfnum og gröfum þeirra.

Æskilegt er að nemendur fái tækifæri til að vinna verkefnið með aðstoð tölvuforrits t.d. *Flott föll, Geogebra* eða *Grapher* sem áður hefur verið minnst á. Sum þessara forrita leyfa ekki að teikningar séu vistaðar eða prentaðar út en þá geta nemendur rissað upp mynd af grafinu eftir fyrirmyndum á skjánum. Dæmi 49–51 er einnig tilvalið að nemendur leysi með aðstoð tölvuforrits og í raun mætti tengja öll verkefnin á blaðsíðu 31–32 við hópverkefnið.

Á blaðsíðu 33 og 34 kynnast nemendur því hvernig finna má núllstöðvar grafs eða lausn á jöfnu grafsins þegar y er jafnt og núll. Þeir kynnast dæmum um hvernig lesa má núllstöðvar beint af grafinu, finna þær með þáttun eða með því að finna ferningsrót. Mikilvægt er að vekja athygli nemenda á því að einungis er um einfaldar annars stigs jöfnur að ræða hér og að stundum duga þessar leiðir ekki þó oft megi lesa núllstöðvar af grafi með nokkurri nákvæmni þegar notuð eru tölvuforrit. Gott er að nemendur teikni einnig gröf jafnanna með tölvuforriti og sannreyni þannig svör sem fundin eru með því að þátta. Tölvuforritið *Geogebra* er mjög hentugt fyrir þessa vinnu en þar geta nemendur stækkað og minnkað ákveðna hluta myndarinnar og skoðað tiltekna punkta. Einnig geta þeir vistað teikningar og flutt yfir í ritvinnsluskjöl. Það ætti að auðvelda nemendum mjög að ná tökum á þessu viðfangsefni er þeir fást við að finna núllstöðvarnar, bæði með því að þátta og teikna gröf þeirra. Tölvuforrit gera nemendum kleift að teikna gröfin á mjög einfaldan hátt og því ættu þeir að eiga auðveldara með að sjá hluti fyrir sér og tengja saman mismunandi framsetningarmáta.



Á blaðsíðu 35 eru dæmi þar sem reynir á að nemendur leysi viðfangsefni með því setja upp jöfnur. Þau má nota sem námsmatsverkefni en einnig geta nemendur spreytt sig á að leysa þau tveir og tveir saman.

Rökhugsun

Aðferðir
Markmið að nemendur:

- Geti fylgt einföldum röksemdafærslum í stærðfræði, dæmt um réttmæti röksemdafærslna og komið auga á rökvillur.
- Nái valdi á að setja fram skýra röksemdafærslu í mæltu máli og rituðu.
- Geti leitt rök út frá gefnum forsendum og metið gildi rökleiðslu.
- Beiti ólíkum aðferðum við lausnir þrauta, getir lýst þeim og rökstutt niðurstöður.
- Geri sér grein fyrir hvernig nota má mótdæmi til að afsanna tilgátur.
- Geti sett fram og skilið samsettar yrðingar og metið sanngildi þeirra.

Umfjöllun um inntak og vinnubrögð

Röksemdafærsla er einn af hornsteinum stærðfræðinnar.Ýmsar fleiri vísindagreinar leggja mikla áherslu á röksemdafærslu og það reynist víða í lífinu gagnlegt að beita rökhugsun við lausn fjölbreyttra viðfangsefna. Stærðfræðilegar niðurstöður eru oft staðfestar með sönnunum sem byggjast á röksemdafærslu. Þá eru fyrst settar fram forsendur, á skýran hátt, og öll hugtök eru vel skilgreind og síðan er dregin rökrétt niðurstaða. Mikilvægt er að nemendur fái tækifæri til að æfa sig í að greina forsendur og leiða rök út frá þeim. Nemendur hafa áður séð sannanir og oft verið beðnir að greina frá lausnaleiðum sínum og niðurstöðum. Í þessum kafla er haldið áfram á sömu braut en í lok kaflans er lítillega fengist við formlega rökfræði.

Megininntak kaflans eru þrautir sem nemendum er ætlað að glíma við. Áhersla er lögð á að þeir geti greint frá lausnaleiðum sínum og rökstutt niðurstöður. Oft er vandi að leysa þrautir, ekki síst að finna leið til að glíma við þær. Gott er því að þekkja margar leiðir en um leið að beita útsjónarsemi og hafa úthald í að gera margar atlögur. Stærðfræðingurinn Georg Polya (1887–1985) setti fram leiðbeinandi verklagsreglur um hvernig fara má að við lausnir þrauta sem gagnlegt getur verið að hafa til hliðsjónar.

1. regla: Skilja verkefnið
2. regla: Gera áætlun
3. regla: Framkvæma áætlunina
4. regla: Endurskoða

1. regla: Skilja verkefnið
Þegar nemendur fá þraut í hendur er nauðsynlegt að þeir byrji á því að átta sig á hvað felst í þrautinni. Þá getur verið gott að kennari eða nemendur sjálfir spyrji spurninga til að skilningur náist. Það gætu verið spurningar eins og:

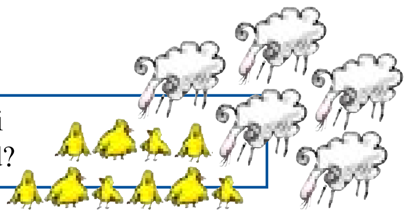
- Skiljum við öll orðin í lýsingu þrautarinnar?
- Um hvað er verið að spyrja í þrautinni?
- Hvernig má endursegja þrautina með eigin orðum?
- Hvernig má setja þrautina fram á annan hátt?
- Hver er raunveruleg merking lykilhugtakanna í þrautinni?
- Hvaða tölur mætti prófa?
- Væri hægt að teikna mynd af aðstæðum í þrautinni?
- Hvaða upplýsingar eru gefnar og að hverju er leitað?

2. regla: Gera áætlun

Margar leiðir má fara við lausnir þrauta. Nemendur þurfa að hafa yfirsýn og geta beitt margvíslegum leiðum. Það fer eftir eðli og inntaki þrautanna hvaða leið/leiðir henta best. Einstaklingar eru ekki alltaf sammála um hvað sé hentugasta leiðin hverju sinni og ekki er hægt að gera tæmandi lista yfir leiðir. En hér eru nefndar nokkrar algengar leiðir sem sumar skarast.

1. Giska og prófa
2. Gera skipulegan lista
3. Teikna mynd
4. Leita að mynstri
5. Búa til töflu
6. Nota breytu og setja upp jöfnu
7. Skoða sértilvik
8. Leysa hliðstætt verkefni
9. Leysa einfaldara verkefni
10. Draga ályktun af sértilvikum
11. Vinna sig til baka út frá niðurstöðunni
12. Útiloka möguleika
13. Reyna skúffureglu
14. Nota aðleiðslu sem rökfærslu
15. Nota afleiðslu til rökfærslu
16. ...

Leysa á þraut eins og:



Svanborg á 25 dýr sem hafa samtals 76 fætur. Hún á bæði kjúklinga og kindur. Hve mörg dýr á hún af hvorri tegund?

Þegar leysa á þraut af þessari gerð koma margar leiðir til greina. Hver og einn verður að velja og gera áætlun út frá því. Það má hugsa sér að prófa sig áfram, búa til lista og leita að mynstri, teikna dýrin og bæta fótum á eftir þörfum og setja fram jöfnur. Gaman getur verið að skoða sömu þrautina út frá mismunandi lausnaraðferðum.

3. regla: Framkvæma áætlun

Mesti vandinn við lausnir þrauta er að láta sér detta í hug hentuga leið til að finna lausn. Þegar gerð hefur verið áætlun er um að gera að framkvæma hana og gefast ekki of fljótt upp. Oft getur þurft að reyna fleiri en eina leið og gott er að muna að allir þurfa að leita og prófa. Verkefni sem reyna á úthald, útsjónarsemi og einbeitingu krefja nemandann um dýpri hugsun og það að rekast á er lærdómsríkt í sjálfu sér. Ekki má gleyma að ekkert stekkur fram fullskapað án fyrirhafnar og gleðin yfir góðri lausn verður þeim mun meiri sem menn hafa lagt sig meira fram og velt málinu betur fyrir sér.

Þrautina um dýr Svanborgar má leysa með því að:

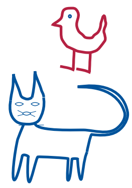
1. Giska og prófa. Fyrst mætti spyrja hvað ef kjúklingarnir væru 8 og kindurnar 17. Þá væri fjöldi fóta $8 \cdot 2 + 17 \cdot 4 = 84$. Það er aðeins of mikið og þá þarf að fækka kindunum. Þá er prófað en ef kjúklingarnir væru 15 og kindurnar 10. Þá er fjöldi fóta $15 \cdot 2 + 10 \cdot 4 = 70$ sem er of lítið. Þannig má halda áfram þar til lausn hefur fundist.

2. Gera skipulega lista. Það einfaldar leitina að gera skipulegan lista. Þá er gott að setja upp töflu.

Kjúklingar	Kindur	Fætur kjúklinga	Fætur kinda	Heildarfjöldi
8	17	16	68	84
9	16	18	64	82
10	15	20	60	80
11	14	22	56	78
12	13	24	52	76

3. Út frá mynstrinu í töflunni má sjá að ef kjúklingum fjölgar um einn og kindum fækkar um eina þá fækkar fjölda fóta um tvo.

4. Teikna dýr. Fyrst væri hægt að teikna 15 búka og setja tvo fætur á hvern. Þá er talið og í ljós kemur að 30 fætur eru á þessum 15 dýrum. Það eru of fáir fætur svo bætt er tveimur fótum á dýr þangað til fjöldinn er orðinn 40 fætur.



5. Nota breytu og setja upp jöfnu. Setja má upp tvær jöfnur og leysa þær saman. x táknar fjölda kjúklinga og y táknar fjölda kinda.

$2x + 4y = 76$ og $x + y = 25$

Með því að nota innsetningu má fá fram: $x = 25 – y$

$$2(25 – y) + 4y = 76$$
$$50 –2y + 4y = 76$$
$$2y = 26$$
$$y = 13$$

Kindurnar (y) hljóta því að vera 13 og ef þetta gildi á y er sett inn í jöfnuna $x + y = 25$ kemur fram að kjúklingarnir eru 12.

Fleiri leiðir má fara við að leysa þessa þraut en þessi dæmi eru látin duga.

4. regla: Endurskoða

Mikilvægt er að skoða lausnir sínar vel og prófa svarið. Einnig er mjög hollt að velta fyrir sér hvað leiddi til þess að lausn fannst og hvernig hefði mátt leysa þrautina á annan hátt. Halda má áfram með þrautina og skoða hvernig það hefði breytt lausninni ef tölum eða samhengi hefði verið breytt í þrautinni.

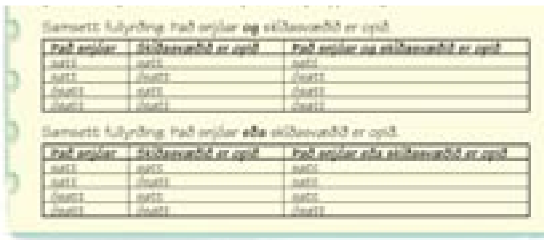
Verklagsreglur Polya er gott að nota í kennslu. Þær gefa kennurum hugmyndir um góðar spurningar og vísbendingar sem hægt er að gauka að nemendum.

Þegar settar eru fram tilgátur sem skoða á hvort eru sannar getur verið einfaldara að afsanna þær en sanna. Til þess að tilgátur geti talist sannar þurfa þær að standast fyrir öll tilvik sem forsendur ná yfir. Því er nóg að finna eitt dæmi, mótdæmi, um að tilgátan standist ekki. Það er oft skemmtileg glíma að finna slík mótdæmi.

Stærðfræðileg fullyrðing er annaðhvort sönn eða ósönn. Setning er ekki fullyrðing nema meta megi sanngildi hennar. Setningar eins og dragðu 4 frá 12 eru ekki fullyrðingar því það er aðeins skipun í setningunni en engin fullyrðing. Setningar eins og Guðrún er frek eða Jón er fagur eru heldur ekki fullyrðing því ekki er á einhlítan hátt hægt að skera úr um sanngildi þeirra.

Fullyrðingum er oft skeytt saman með samtengingum. Þegar meta á sanngildi samsettra yrðinga með samtengingunum **og** og **eða** getur verið hagkvæmt að setja upp sanngildistöflur. Til þess að samsett yrðing með samtengingunni **og** geti talist sönn þurfa báðar yrðingar að vera sannar. En til þess að samsett yrðing með samtengingunni **eða** geti talist sönn dugar að önnur sé sönn en einnig getur verið að báðar séu sannar. Samtengingin **eða** hefur örlítið aðra merkingu í rökfræði en í daglegu máli. Venjulega er gengið út frá að átt sé við **annaðhvort … eða** og því þurfa nemendur og kennarar að vera vel meðvitaðir um þennan mun.

Samtengingin **ef … þá** er notuð þegar setja á fram orsakasamhengi. Það er ekki gagnvirkt og því ekki hægt að snúa fullyrðingu við. Þegar meta á sanngildi fullyrðinga sem byggjast á orsakasamhengi þarf að meta tengingu setninga.



Samsett fullyrðing: Það snjóar **og** skíðasvæðið er opið.

Það snjóar	Skíðasvæðið er opið	Það snjóar og skíðasvæðið er opið
satt	satt	satt
satt	ósatt	ósatt
ósatt	satt	ósatt
ósatt	ósatt	ósatt

Samsett fullyrðing: Það snjóar **eða** skíðasvæðið er opið.

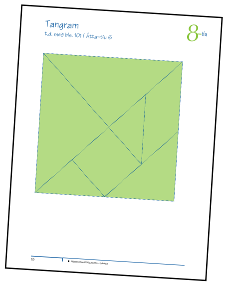
Það snjóar	Skíðasvæðið er opið	Það snjóar eða skíðasvæðið er opið
satt	satt	satt
satt	ósatt	satt
ósatt	satt	satt
ósatt	ósatt	ósatt

Nemendur fá stutta kynningu á hugtakinu rökleiðsla og hvernig leggja má mat á hvort rökleiðsla er gild. Þá er verið að vinna með hvort rökrétt sé að álykta á tiltekinn hátt út frá gefnum forsendum. Auðvelt er að falla í ýmsar gildrur við mat á rökleiðslum, því rökleiðsla getur verið gild þó niðurstaða sé ekki sönn. Ástæðan er sú að verið er að meta rökleiðsluna en ekki hvort forsendur séu réttar. Þess vegna er erfitt að sjá í gegnum ýmsar rökleiðslur og því gaman að velta ýmsu samhengi fyrir sér.

Á slóðinni hér fyrir neðan er að finna myndbandsbút sem gaman er að sýna nemendum til að ýta undir umræður um rökræður og rökfærslu. Búturinn er úr myndinni *Princess Bride*. http://youtube.com/watch?v=TUee1WvtQZU

Kennsluhugmyndir

Margir nemendur hafa mikinn stuðning af að nota hluti og myndir við lausn verkefna. Í fyrstu dæmum kaflans er unnið með pappír. Í fyrsta dæminu ættu nemendur að búa til blað með réttum hliðarlengdum til að hafa til viðmiðunar en til þess að geta mælt nákvæmlega átta sentímetra þarf að leggja saman og draga frá hliðarlengdir. Þetta er svolítil glíma en með rétthyrning í hendi ætti að vera auðvelt fyrir nemendur að prófa sig áfram. Í dæmi 2 er nauðsynlegt fyrir nemendur að hafa tangramsbúta þegar þeir reyna að búa til hyrninga. Eyðublað fyrir *Tangram* er að finna á heimasíðu námsefnisins en nemendur geta líka búið til ferning og unnið út frá myndinni á bls. 36. Tangrambútar eru notaðir til að búa til alls konar myndir og getur verið gaman fyrir nemendur að glíma við að finna út hvernig bútum hefur verið raðað til að búa til myndir en einnig að búa sjálfir til myndir og leggja þrautir fyrir samnemendur. Á Netinu má víða finna myndir, t.d. á slóðinni:



http://images.google.is/images?q=Tangram&hl=is&lr=&um=1&ie=UTF-8&sa=X&oi=images&ct=title

Á blaðsíðum 37–43 eru skoðaðar nokkrar leiðir sem fara má við að leysa þrautir. Í upphafi er stuttlega fjallað um hugmyndir stærðfræðingsins Polya um verklagsreglur við lausnir þrauta. Nemendur gætu haft gaman af að kennari segði þeim frá Polya og síðan væri safnað saman öllum hugmyndum um færar leiðir þegar glíma á við þrautir. Einnig er gott að ræða um gildi þess að beita rökhugsun og að dregnar séu ályktanir af gefnum upplýsingum. Nemendur geta sem best búið til fleiri sambærilegar þrautir og lagt hver fyrir annan.

Fyrst er skoðað hvernig það getur verið gagnlegt við lausnir þrauta að skrá í töflu og prófa sig áfram. Þá er líka kjörið að minna nemendur á að nota má *goal seek* í töflureiknisforritinu *Excel*. Notkun taflna er góð leið til að gera sér grein fyrir þýðingu þess að skrá upplýsingar skipulega. Á blaðsíðu 38 er sjónum beint að því að margar leiðir má fara við lausn og kallað eftir að nemendur beri sig saman. Þegar nemandi þarf að útskýra lausnaleið sína verður hann að gæta þess að röksemdafærsla hans haldi og því er afar mikilvægt að nemendur æfist í því. Í hópverkefni fá nemendur spurningu sem svara þarf neitandi. Gera þarf kröfu til þeirra að þeir sýni skýrt fram á að ekki sé hægt að þekja skákborð með dómínókubbum þegar gagnstæðir hornreitir hafa verið teknir af. Ferningarnir sem sjá má á skákborði eru margir og gott er að hvetja nemendur til að nota rúðunet til að geta teiknað myndir við lausnaleitina.

Á blaðsíðu 39 eru margar þrautir þar sem hentar vel að finna lausn þrep fyrir þrep. Það getur tekið tíma að leysa hverja þraut og því tilvalið að nemendur velji sér þrautir. Í bókinni er stungið upp á að nemendur velji fjórar af þrautunum en kennari getur valið ákveðnar þrautir til að hægt sé að ræða þær og lausnir þeirra sameiginlega. Ekki þurfa allir nemendur að leysa jafnmargar þrautir. Púsluspilaþrautin er nýstárleg og sumir nemendur gætu tvíeflst við að fá svo myndræna þraut.

Talnagátur eru vel afmörkuð verkefni. Meginviðfangsefnið er að lesa úr samþjöppuðum vísbendingum. Hér er líka æfing í að lesa stærðfræðihugtök og leið til að rifja upp og viðhalda skilningi á þeim. Þrautirnar á bls. 41 eru þannig að meta þarf vísbendingar og raða þeim saman. Dæmi 22 og 23 eru nokkuð létt en í dæmum 24 og 25 eru upplýsingar takmarkaðar og lesa þarf á milli línanna.

Spil er oft hentug námsaðferð. Þar reynir oftast á rökhugsun og afleiðingar aðgerða koma fljótt í ljós. Nemendur hafa margir gaman af spilum og eru tilbúnir að leggja orku og einbeitingu í að finna vinningsleiðir. Nim er frægt spil sem spilað er á margvíslegan hátt en alltaf þannig að unnið er með að fjarlægja eða bæta við með það markmið að ráða niðurstöðutölu. Hér eru verkefnin sett fram bæði þannig að nemendur noti pinna (t.d. tannstöngla, eldspýtur eða liti) og vasareikni. Ástæða er til að ræða um muninn á vinningsleið eftir því hvort notuð er samlagning eða frádráttur. Einnig er áhugavert að velta fyrir sér hvað breytist ef markmiðið er að láta andstæðinginn taka síðasta pinnann.

Í dæmum 30–35 eru viðfangsefni þar sem hentugt er að teikna, nota mengjamyndir eða talningatré til að skrá upplýsingar og við leit að lausn. Dæmin verða mun auðveldari viðfangs ef teikningar eru notaðar.

Á blaðsíðum 44–47 er fengist við formlegri rökfræði. Í upphafi glíma nemendur við að finna mótdæmi til að afsanna tilgátu. Gaman gæti verið fyrir nemendur að búa til fleiri dæmi af þessari gerð. Í dæmum 37–39 er sjónum beint að röksemdafærslum og mikilvægt er að beina athyglinni að því að röksemdafærsla þarf að vera nákvæm og eitt þarf að leiða af öðru. Nemendur þurfa bæði að geta sett fram eigin röksemdafærslu og fundið villur í röksemdafærslu annarra. Skynsamlegt gæti verið að beina nemendum í að vinna dæmi 36–39 í litlum hópum.

Á blaðsíðu 45 er fjallað um fullyrðingar og sanngildistöflur. Nemendur kynnast hvernig nota má sanngildistöflur til að meta sanngildi samsettra fullyrðinga. Þetta er nýtt form fyrir nemendur en byggist á því sama og gert er í leitarvélum á Netinu. Orsakasamhengi er oft sett fram með samtengingunni **ef** … **þá.** Nemendur þurfa að átta sig á að það er ekki gagnvirkt og að sanngildi slíkra samsettra fullyrðinga þarf að meta af nákvæmni. Nemendur þurfa líka að átta sig á að rökleiðsla getur verið gild þó niðurstaða sé ekki sönn. Á blaðsíðu 47 er fjallað um það.

Gaman er hvetja nemendur til að koma með þrautir og leggja fyrir nemendur og kennara. Ýmsar áhugaverðar þrautir eru á ferðinni meðal almennings því margir hafa gaman af glímu við þrautir. Það getur líka verið áhugavert fyrir nemendur að kennari segi þeim frá rökfræði og í leikjafræði má finna mörg fræg viðfangsefni, t.d. þrautina um klemmu fangans og Monty Hall-leikinn.

Rauntölur

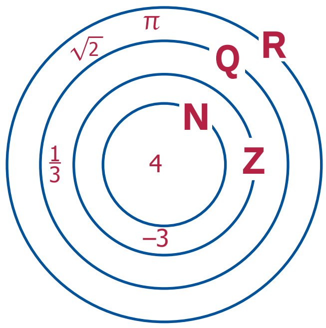
Inntak
Markmið að nemendur:

- Þekki mengi náttúrlegra talna, heilla talna, ræðra talna og rauntalna, tákn þeirra, N, Z, Q og R, og skilji samsvörun milli punkta á línu og rauntalna.
- Nái góðu valdi á röðun og meðferð ræðra talna, bæði almennra brota og tugabrota.
- Viti af tilvist rauntalna sem eru ekki ræðar, svo sem $\sqrt{2}$ og π, og hafi kynnst óbeinni sönnun á því að $\sqrt{2}$ er óræð tala.
- Geri sér grein fyrir að kasta má tölu á hvaða lengd sem er og viti að nálgast má óræðar tölur með fleiri og fleiri aukastöfum.
- Viti að beita má reikniaðgerðum á óræðar tölur.
- Þekki skilgreiningu á tölugildi og helstu reiknireglur um það.

Aðferðir
Markmið að nemendur:

- Lesi og riti af öryggi almenn brot, tugabrot og prósentur og sýni vald á veldarithætti talna og staðalformi.
- Geti áætlað lausnir og niðurstöður með hugareikningi og námundun.

Umfjöllun um inntak og vinnubrögð



Góður skilningur á tölum og sambandi þeirra er öllum nauðsynlegur. Tölur eru undirstöðutákn í stærðfræði. Þær hafa ólíka eiginleika og er þeim skipað saman í talnamengi á grundvelli þeirra. Talnamengin eru hlutmengi hvert í öðru. Eftir því sem stærðfræðin hefur þróast sem fræðigrein hefur skapast þörf fyrir nýjar gerðir talna og fyrir að rannsaka ólíka eiginleika talna.

N er mengi náttúrlegra talna. N = {1, 2, 3, ...}
Z er mengi heilla talna. Z = {..., –2, –1, 0, 1, 2, 3, ...}
Q er mengi ræðra talna. Q = {Allar tölur $\frac{a}{b}$, þar sem a og b tilheyra Z og $b \neq 0$}
R er mengi ræðra og óræðra talna. R = {Allar ræðar og óræðar tölur}

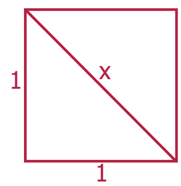
Mikilvægt er að nemendur átti sig vel á talnamengjum og þekki hvernig þau afmarkast og tengjast. Í grunnskólanámsefni er látið nægja að vinna með rauntölur sem yfirgripsmesta talnamengið en nemendur þurfa að vita að til eru fleiri talnamengi. Stærðfræðingar hafa stundað miklar rannsóknir á tölum og velt fyrir sér hvaða eiginleikar þeirra styðja við skilning á eðli talna og við beitingu reikniaðgerða á þær. Pýþagóringar stunduðu rannsóknir á tölum og má lesa ýmislegt fróðlegt um þær rannsóknir í bók Jóns Þorvarðarsonar *Og ég skal hreyfa jörðina*[1].

Í sönnun á að ferningsrótin af 2 sé óræð tala er beitt aðferðum óbeinnar sönnunar. Þá er í upphafi gert ráð fyrir að andstæða þeirrar reglu sem sanna á sé sönn. Síðan er leitt í ljós að svo geti ekki verið. Ekki er með vissu vitað hvenær þessi sönnun var fyrst sett fram en sumir telja að það kynni að hafa verið fyrir daga Pýþagórasar. Flestir telja þó að Pýþagóringar hafi sjálfir gert þessa uppgötvun og hafði hún mikil áhrif þar sem hún breytti meginhugmyndum þeirra um tölur.

Stærðir má skrá á ýmsa vegu. Leggja þarf áherslu á að nemendur geti nýtt sér ólíkan skráningarmáta og að þeir geti valið heppilegan skráningarmáta hverju sinni. Mikilvægt er líka að þeir nái valdi á að færa á milli skráningarmáta. Þeir hafa væntanlega áður unnið með ólík skráningarform en skilning getur þurft að skerpa og viðhalda þarf færninni. Myndræn skráning á talnalínu eða í rúðunet getur verið heppileg til að átta sig á stærð því þá kemur fram skýrt viðmið. Staðalform er oft notað þegar vinna á með mjög stórar tölur eða mjög litlar. Í tugakerfinu felst að hægt er að skrá allar stærðir sem tveggja þátta margfeldi þar sem veldi af 10 er annar þátturinn. Það getur verið mjög gagnlegt því auðvelt er að reikna með 10 og hinn þátturinn er almennt skráður með tölu milli 1 og 10.

Tugabrot eru mjög algeng þó oft séu almenn brot nákvæmari skráning. Lotubundin óendanleg tugabrot má skrá sem almenn brot. Í *Átta-10, 5* er sýnd aðferð sem nota má við að breyta slíkum tugabrotum í almenn brot þar sem eiginleikar sætiskerfisins eru notaðir til að losna við aukastafina í tugabrotinu. Öll endanleg tugabrot má, vegna þessara eiginleika, skrá sem almenn brot með nefnara sem er veldi af 10. Af því leiðir að almenn brot sem hafa nefnara sem ekki er hægt að lengja þannig að hann verði veldi af 10 er ekki hægt að skrá sem endanleg tugabrot. Óendanleg lotulaus tugabrot eru alltaf ónákvæm skráning á stærð. Námundun er oft beitt þegar nákvæmni er ekki þörf eða þegar ekki er raunhæft að reikna með mörgum aukastöfum. Við námundun er horft á fyrsta tölustafinn sem höggva á af og ef hann er 5 eða hærri er síðasti tölustafurinn sem á að halda sér hækkaður um einn. Gaman er að skoða námundun á tugabroti eins og 0,999999 sem skrá á með einum aukastaf.

Rauntölur er mengi ræðra og óræðra talna. Fjöldi talnanna er óendanlegur og því má alltaf skrá nýja tölu á milli hvaða talna sem er í mengi rauntalna. Óræðar tölur er ekki hægt að skrá sem almenn brot og oft eru tölur eins og π og rætur ræðra talna notaðar sem dæmi um óræðar tölur. Óræðu tölurnar hafa reynst mönnum erfiðar og í upphafi voru þær skráðar sem línustrik. Þannig var ferningsrótin af 2 gjarnan skráð sem hornalína í einingaferningi. Rótarmerkið √ hefur gert það mun einfaldara að skrá af meiri nákvæmni og að reikna með óræðum tölum.



---

1 Jón Þorvarðarson. 2005. *Og ég skal hreyfa jörðina- forngrísku stærðfræðingarnir og áhrif þeirra.* Reykjavík, STÆ ehf.

Eiginleikar talna koma skýrt fram þegar reiknað er með þeim. Áhugavert er því að skoða hvernig og hvort eiginleikar talna haldast. Nemendur geta gert ýmsar rannsóknir og er lærdómsríkt fyrir þá að prófa sig áfram og finna sér rannsóknarefni eftir því sem tilefni gefst til. Ýta þarf undir að nemendur leiti að reglu og sambandi þegar þeir eru að reikna með ólíkum gerðum talna. Það hjálpar þeim mjög að efla skilning sinn á hvort svör geti staðist og rétt hafi verið reiknað. Þegar beita þarf námundun við skráningu stærða kemur alltaf fram einhver skekkja. Þegar tölur sem hafa námundaðar eru notaðar í útreikningum eykst skekkjan og þess vegna er gott að reyna að hafa tölur sem nákvæmastar í útreikningum.

Hugtakið tölugildi er notað þegar skráð er fjarlægð rauntalna frá núllpunkti á talnalínu. Nemendur hafa eflaust kynnst þessu hugtaki lítillega en hér bætist við að þeir eiga að geta reiknað einföld dæmi þar sem stærðir eru skráðar sem tölugildi.

Kennsluhugmyndir

Í upphafi kaflans er sjónum beint að skoðun á eiginleikum talna. Í fyrsta dæminu eru skoðaðar tvær tölur og nemendum ætlað að bera þær saman. Önnur er frumtala en hin samsett tala. Í næsta dæmi er skoðað hvað er sameiginlegt. Hvetja ætti nemendur til að beita þessari hugsun við úrlausnir dæmanna í kaflanum, þ.e. að leita að því sem er sameiginlegt og því sem aðskilur.

Mikilvægt er að nemendur geti skráð stærðir á mismunandi vegu. Þeir þurfa að halda við skilningi sínum og færni í að vinna með tugabrot og almenn brot. Flestir þeirra grípa til vasareiknis þegar þeir eiga að skrá almenn brot sem tugabrot. Gott getur því verið að rifja upp með þeim hvernig lengja má mörg almenn brot þannig að nefnarinn verði veldi af 10 því þá er einfalt að skrá þau sem tugabrot. Einnig er heppilegt að ræða við nemendur um uppbyggingu sætiskerfisins og hvernig tugakerfið er notað. Þegar stærðir eru skráðar á staðalform er gagnlegt að nýta sér tugakerfið. Þá má skrá tölu á milli 1 og 10 í talnahús og sjá um hve mörg sæti þarf að færa kommuna til að fá upphaflegu töluna. Þannig fæst í hvaða veldi talan 10 þarf að vera. Til að efla skilning nemenda á gildi mismunandi skráningarmáta er gott að safna þeim hugmyndum um notkun þeirra sem koma fram í svörum nemenda við dæmi 11.

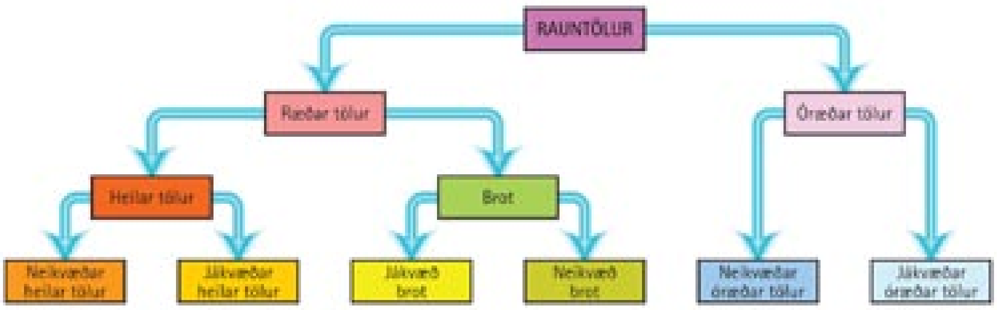
Þegar nemendur eru að vinna með lotubundin, óendanleg tugabrot gefst gott tækifæri til að ræða um kosti og galla við skráningu stærða sem almenn brot eða tugabrot. Hér er nemendum ætlað að rifja upp hvernig skrá má lotubundin, óendanleg tugabrot sem almenn brot en megináherslu ber að leggja á að þeir viti að slík tugabrot eru ræðar tölur. Aðalatriði er að nemendur geti breytt endanlegum tugabrotum í almenn brot og sýni skilning á skráningarformunum. Stutt upprifjun er á námundun og viðmiðum sem notuð eru við námundun. Neðst á bls. 50 er leikur eða rannsókn. Hvetja ætti nemendur til að bera saman niðurstöður sínar og hjálpast að við að átta sig á einkennum sem koma fram í talnarununum.

NÁMSGAGNASTOFNUN 2008 – Kennsluleiðbeiningar – 09847

Sérstaka athygli þarf að viðhafa þegar reiknað er með jákvæðum og neikvæðum tölum. Í dæmi 17 er skoðað hvaða áhrif það hefur við samlagningu og frádrátt hvort tölurnar sem reiknað er með eru jákvæðar eða neikvæðar. Nemendur gætu gert sambærilega rannsókn fyrir reikniaðgerðirnar margföldun og deilingu.

Dæmi 18–23 eru upprifjun á nokkrum þáttum um rauntölur og ættu nemendur að geta unnið þau sjálfstætt en jafnframt gefst kennara tækifæri til að ræða við einstaka nemendur og litla hópa nemenda um inntak dæmanna.

Blaðsíða 52 fjallar um uppgötvun óræðra talna. Þessa blaðsíðu er væntanlega skynsamlegt að kennari og nemendahópurinn vinni saman. Hér er sett fram sönnun á því að ferningsrótin af 2 sé óræð tala. Notuð er tilvitnun úr bókinni *Og ég skal hreyfa jörðina*. Kennari getur nýtt sér meira efni úr þeirri bók í umfjöllun um sönnunina. Nemendur kynnast hér hvernig óbein sönnun er sett fram og er mikilvægt að beina sjónum þeirra að því hvernig hún er byggð upp, rökleiðslunni og ályktuninni sem af henni leiðir. Kjörið er að nemendur sjái fleiri sannanir eða velti fyrir sér hvernig sanna má t.d. að 2 + 2 = 4.
Á blaðsíðu 53 er yfirlitsmynd sem sýnir vel hvernig rauntölur skiptast eftir eig-



inleikum og hvernig meginflokkarnir, ræðar tölur og óræðar, skarast ekki eða eru hlutmengi hvor í öðrum. Þessi mynd sýnir mengi rauntalna á annan hátt en þegar talnamengin eru teiknuð í mengjamynd. Í dæmi 26 glíma nemendur við reikning með óræðum tölum. Margir eiga erfitt með að sætta sig við að niðurstaða í reikningi verði ekki ein tala en það kemur einmitt fyrir í þessu dæmi. Þar sem erfitt er að sýna stærðirnar með tölu getur verið gott að nota línustrik eins og gert er í dæmi 27. Sumir nemendur gætu haft gaman af að halda áfram með vefjuna og sjá hvað gerist þegar unnið er með stærri tölur.

Óendanleiki er skemmtilegt viðfangsefni. Í bókinni *Talnapúkinn* eftir Hans Magnus Enzensberger er áhugaverð frásögn um óendanleikann út frá heilum tölum. Á blaðsíðu 54 er fjallað um óendanleikann út frá því að alltaf megi bæta við tugabroti á milli hvaða tveggja tugabrota sem er. Einnig af hvaða nákvæmni megi lesa mælinganiðurstöður. Þar vaknar bæði spurning um þörf fyrir nákvæmni og möguleika á að lesa af nákvæmni. Er hægt að lesa lengd striks í nanómetrum? Ekki er hægt að skrifa allar stærðir með tugabrotum þó að þau séu óendanlega mörg og liggi þétt á talnalínunni. Á blaðsíðu 55 er áhugaverð rannsókn á því hvernig nálgast má skráningu á stærðinni $\sqrt{2}$ með tugabrotum og almennum brotum og meta hver skekkjan er. Það gefur tilefni til að ræða um hver áhrif skekkja í skráningu talna og námundun hefur í útreikningum.

Í dæmum 33–40 er tölugildi meginviðfangsefni. Í upphafi er skoðað hvað það merkir og hvaða tákn er notað yfir það. Í lokin er aðeins farið út í að reikna með stærðum skráðum sem tölugildi. Ekki er ástæða til að leggja mikla áherslu á þetta. Frekar er hugmyndin að nemendur þekki skráningarformið og viti að verið er að tákna fjarlægð frá núllpunkti á talnalínu.

Í kaflanum hefur verið unnið með rauntölur á fjölbreyttan hátt. Kaflinn er að mestu leyti upprifjun. Dæmi 41–46 má nota sem samantekt á efni kaflans eða sem námsmatsverkefni. Þar gefst nemendum tækifæri til að prófa skilning sinn og færni á þessu sviði.

Horn

Inntak
Markmið að nemendur:

- Þekki algeng hugtök og lögmál um þríhyrninga, s.s. hornasummu og hvenær tveir þríhyrningar eru eins (sams konar).
- Geti fundið hornastærðir út frá gefnum forsendum.
- Geti beitt reglu um hornasummu þríhyrninga til að finna hornasummu marghyrninga.
- Kunni skil á einslögun hyrninga og tengslum við hlutföll.
- Geti beitt setningu Pýþagórasar.
- Geti teiknað línu samsíða tiltekinni línu í gegnum punkt utan við hana.

Aðferðir
Markmið að nemendur:

- Kynnist ýmsum forsendum og leiðum sem notaðar eru við rúmfræðilegar sannanir og röksemdafærslu.
- Fái þjálfun í að lesa og skrifa stærðfræðilegan texta.
- Geti útskýrt bæði munnlega og skriflega hugtök, aðferðir og eigin niðurstöður í verkefnum og notað skýringarmyndir og tákn eftir því sem við á.

Umfjöllun um inntak og vinnubrögð

Mest öll sú rúmfræði sem fengist er við í grunnskólum í dag byggist á frumsendum, almennum hugtökum og skilgreiningum sem stærðfræðingurinn Evklíð setti fram fyrir rúmum 2300 árum en hann var uppi um 300 f.Kr. Bók hans *Frumatriði* (*Elementa*) er elsta varðveitta ritið sem fjallar um stærðfræði Forngrikkja í heild sinni. En ritið er líka merkilegt fyrir þær sakir að þar var lagður grunnur að stærðfræðilegum vinnubrögðum sem höfð eru í heiðri enn þann dag í dag. Evklíð setur fram frumsendur í formi reglna sem eru ekki byggðar á öðrum reglum og þykja sjálfsagðar og augljósar. Allar aðrar setningar eru síðan sannaðar út frá þeim eða áður sönnuðum setningum. Þær frumsendur sem Evklíð settu fram voru fimm. Hér að neðan eru þær settar fram eins og Jón Þorvarðarson gerir í bók sinni *Og ég skal hreyfa jörðina*.

Gefum okkur sem forsendu:

1. Að draga megi beint línustrik frá hvaða punkti sem er til hvaða punkts sem er.
2. Að framlengja megi línustrik ótakmarkað til beggja átta.
3. Að draga megi hring með hvaða miðpunkt sem er og hvaða radíus (geisla) sem er.

4. Að öll rétt horn séu jafnstór.
5. Að þegar bein lína sker tvær beinar línur og innanverðu hornin sömu megin við hana verða samanlagt krappari en tvö rétt horn, þá skerast línurnar tvær, þegar þær eru framlengdar ótakmarkað, sömu megin við fyrstnefndu línuna og áðurnefnd horn liggja[1].

Í dag eru þekkt mun fleiri rúmfræðikerfi. Ekki er eingöngu horft til hins tvívíða og þrívíða rúms heldur er einnig stuðst við fleiri greinar stærðfræðinnar og horft til fleiri vídda. Þetta er m.a. mögulegt ef horft er fram hjá fimmtu frumsendu Evklíðs. Hún er oft umorðuð á þennan hátt:

> Ef tiltekin er bein lína og einhver punktur sem liggur ekki á þeirri línu, þá er unnt að draga eina og aðeins eina línu sem liggur gegnum punktinn og er samsíða til teknu línunni.

Þessi frumsenda olli stærðfræðingum lengi heilabrotum. Hún þótti annars eðlis en hinar og reyndu þeir að sýna fram á að hægt væri að komast af án hennar. Það tókst þeim ekki fyrr en á 18. öld þegar svokölluð óevklíðsk rúmfræði var sett fram en hún byggist aðeins á fyrstu fjórum frumsendum Evklíðs. Hvað þá fimmtu varðar er gert ráð fyrir að ef við erum með gefna línu og punkt fyrir utan hana þá séu til óendanlega margar línur í gegnum punktinn sem eru samsíða gefnu línunni. Óevklíðsk rúmfræði er yfirleitt ekki viðfangsefni sem tekið er fyrir í grunnskólum en gott er að vita af tilvist hennar fyrir kennara þó fæstir hafi líkast til kynnst henni að einhverju ráði í námi sínu[2].

Ágæta umfjöllun um *Frumatriði Evklíðs* er að finna í bók Jóns Þorvarðarsonar *Og ég skal hreyfa jörðina*. Þar er meðal annars að finna þær 23 skilgreiningar sem er að finna í fyrstu bók *Frumatriðanna* ásamt nokkrum athugasemdum. Gaman getur verið að láta nemendur lesa þessar skilgreiningar og skrá þær hjá sér með sínum eigin orðum og teikningum. Þar er í raun komið inn á öll helstu hugtök sem fengist er við í þessum kafla.

Gerð skilgreininga og æfing í að nota gefnar forsendur við að sanna og lýsa stærðfræðilegum fyrirbærum er mjög góð þjálfun í rökhugsun og röksemdafærslu. Í þessum kafla eru einmitt í byrjun settar fram þær forsendur sem þarf að byggja á þegar sanna á regluna um að hornasumma þríhyrninga sé 180 gráður. Einnig er mikil áhersla lögð á að nemendur geti nýtt sér ýmsar forsendur við að leysa verkefni sem lúta að því að finna hornastærðir og ákvarða hvort marghyrningar eru nákvæmlega eins (sams konar – congruent) eða einslaga. Góð þekking á þríhyrningum og þeim reglum sem gilda um mismunandi gerðir þríhyrninga er grunnur að þessari vinnu. Nemendur hafa áður skoðað mismunandi þríhyrninga og eiginleika þeirra en hér bætist við setningin um einslæg horn við samsíða línur.

1 Jón Þorvarðarsson (2005). *Og ég skal hreyfa jörðina – forngrísku stærðfræðingarnir og áhrif þeirra*. Reykjavík: STÆ ehf.

2 Rögnvaldur G. Möller. „Hvað er rúmfræði?“. *Vísindavefurinn* 25.1.2002. http://visindavefur.is/?id=2073. (Skoðað 24.1.2008).

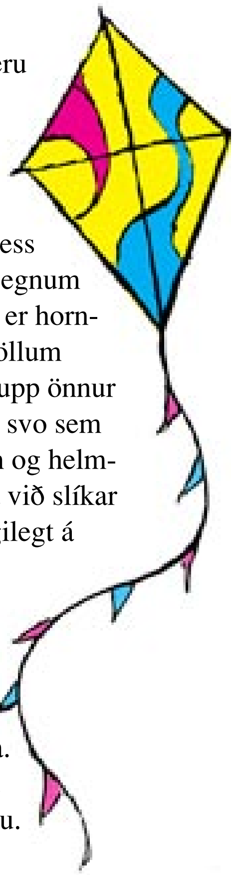
Ef tvær línur eru samsíða þá myndar þriðja línan sem sker hinar tvær einslæg horn við þær sem eru jafn stór.

Þessa setningu má líka orða á þennan hátt.

Ef lína sker tvær línur þannig að það myndast einslæg horn sem eru jafn stór þá eru línurnar tvær samsíða.

Ekki er ástæða til að reyna að sanna þessa setningu á formlegan hátt með nemendum en við sönnunina þarf m.a. að nota 5. frumsendu Evklíðs. Það er hins vegar hægt að færa rök fyrir þessu með hliðrun eins og bent er á í kaflanum.

Kennsluhugmyndir



Kaflinn hefst á því að fjallað er um sannanir og nauðsyn þeirra og síðan eru kynntar þær forsendur sem byggja þarf á þegar sanna á að hornasumma þríhyrnings sé 180° gráður. Æskilegt er að nemendur reyni sjálfir að lesa textann á blaðsíðu 58–60 og fylgja þeim leiðbeiningum sem þar eru og leysa verkefni 1–3. Það mætti þó byrja á að rifja upp með þeim hvernig teikna má línu samsíða annarri línu í gegnum punkt utan við línuna. Til þess að nemendur geti gert það þurfa þeir annars vegar að geta teiknað línu í gegnum punkt utan við gefna línu sem er hornrétt á hana og geta teiknað línu sem er hornrétt á tiltekna línu í gefnum punkti. Nemendur hafa gert þetta áður en að öllum líkindum er nauðsynlegt að rifja það upp. Má í því samhengi einnig rifja upp önnur atriði sem nemendur þurfa að kunna að gera með hringfara og reglustiku, svo sem eins og að teikna miðþveril, skipta hringferli í sex jafna hluta, teikna horn og helminga horn. Einnig er tilvalið að kynna fyrir nemendum forrit sem nota má við slíkar teikningar svo sem eins og forritin *Geogebra* og *Geonext* sem eru aðgengilegt á netinu eða forritið *The Geometer's Sketchpad.*

Á blaðsíðu 61 eru dæmi þar sem nemendur þurfa að notfæra sér regluna um hornasummu þríhyrnings og þær forsendur sem notaðar voru til að sanna hana. Mikilvægt er að nemendur lýsi því hvernig þeir fara að við að finna stærðir óþekktu hornanna og greini frá hvaða forsendur þeir nota. Æskilegt er að nemendur vinni tveir og tveir saman að lausn verkefnanna til þess að ýta undir að þeir ræði saman og lýsi forsendum sem notaðar eru.

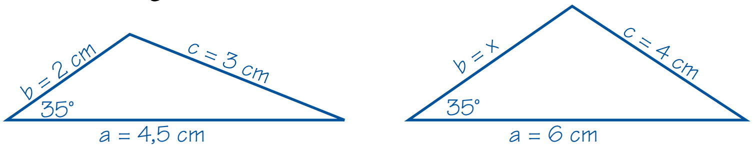
Á blaðsíðu 62 er hópverkefni þar sem nemendur eiga að reyna að átta sig á því hvaða upplýsingar þeir þurfa að hafa til að geta ákvarðað hvort tveir þríhyrningar séu nákvæmlega eins (sams konar), þ.e. bæði einslaga og með sama flatarmál. Nemendur gætu einnig unnið hin verkefnin á blaðsíðunni í hópum. Þegar hópar gera grein fyrir niðurstöðum má láta einn hóp byrja að segja frá og reyna síðan að fá fram hjá hinum hópunum hvort þeir hafi komist að sömu niðurstöðu eða hvort þeir hafi einhverju nýju við að bæta. Þannig má koma í veg fyrir langdregin hópskil, þar sem mikið er um endurtekningar, auk þess sem reynt er að beina sjónum nemenda að því hvað eru mikilvægar nýjar upplýsingar út frá stærðfræðilegu sjónarhorni. Mun auðveldara er fyrir kennara að gera þetta ef hann er búinn að kynna sér verkefni nemenda áður en til hópskilanna kemur. Þá getur hann valið hóp sem byrjar og síðan reynt að fá fram fleiri mikilvæg atriði frá hinum hópunum. Gæta verður þess að það sé hvorki lakasta né besta lausnin sem byrjað er á.

Á blaðsíðu 63 eiga nemendur að finna reglu sem nota má til að finna hornasummu hvaða marghyrnings sem er. Þeir hafa fengist við þetta áður og hér er því um upprifjun að ræða. Það má því byrja á að taka þetta upp til umræðu og kanna hvort þetta er atriði sem nemendur hafa náð tökum á en einnig getur kennari fylgst með nemendum við vinnuna og látið þá sleppa verkefnum ef honum finnst ástæða til.

Hópverkefnið neðst á blaðsíðunni er gott að vinna í litlum hópum og nauðsynlegt er að nemendur hafi fimmhyrninga að vinna með sem þeir geta klippt niður. Æskilegt er að fimmhyrningarnir séu sæmilega stórir til að auðvelt sé að meðhöndla bútana þegar búið er að klippa þá niður.

Á blaðsíðu 64 eru nokkuð mörg verkefni þar sem nemendur eiga að finna óþekkt horn í þríhyrningum og ferhyrningum. Gefnar eru ýmsar forsendur sem nemendur geta þurft að nota og er ætlast til að þeir geri grein fyrir hvaða forsendur þeir nota við lausn hvers verkefnis. Ekki er ástæða til að allir nemendur leysi öll verkefnin. Það mætti skipta þeim á milli nemenda eða leyfa nemendum sjálfum að velja nokkur verkefni til að leysa. Þetta getur reynt svolítið á og sumum finnst sjálfsagt skemmtilegt að glíma við verkefnin meðan aðrir hafa ekki úthald í að leysa þau öll.

Á blaðsíðu 65–68 er viðfangsefnið stækkanir, smækkanir og einslögun. Hér er um upprifjun að ræða og ættu nemendur að geta unnið verkefnin sjálfstætt eða tveir og tveir saman. Í sambandi við stækkanir og smækkanir þurfa nemendur að átta sig á að hlutföll milli hliðarlengda hyrningsins haldast óbreytt fyrir og eftir stækkun og hlutföll milli einslægra hliða hyrninganna einnig. Það er því bæði hægt að nota margföldunarstuðul innan hlutfalls og marföldunarstuðul milli hlutfalla þegar kanna á hvort um einslögun er að ræða eða þegar finna á óþekkta stærð þegar vitað er að um einslögun er að ræða.



Hér er hlutfallið milli hliða a og b í litla þríhyrningnum $\frac{4,5}{2}$ eða 2,25 en hlutfallið milli einslægra hliða í þríhyrningunum er $1\frac{1}{3}$. Nota má hvort hlutfallið sem er til að finna óþekktu stærðina. Gott er að taka þetta til umræðu og skoðunar með nemendum.

Á síðustu blaðsíðu kaflans eru nokkur dæmi þar sem nemendur þurfa að beita setningu Pýþagórasar til að finna óþekkta hliðarlengd í rétthyrndum þríhyrningi. Gott er að láta reyna á það hvort nemendur átta sig á því hvernig þeir geta fundið hliðarlengdirnar. Einnig er nauðsynlegt að ræða að setning Pýþagórasar á einungis við ef um rétthyrnda þríhyrninga er að ræða.

Síðasta verkefnið er eins konar samantektar- eða námsmatsverkefni og þarf að brýna fyrir nemendum að hér eiga þeir að reyna að koma á framfæri öllu því sem þeir vita um þríhyrninga og eiginleika þeirra. Benda má nemendum á að skoða myndirnar á síðunni til að koma sér af stað.

Prósentur

Inntak
Markmið að nemendur:

- Viti að prósent merkir hundraðshluta af heild og geti notfært sér það við prósentureikning.
- Öðlist færni í prósentureikningi sem algengur er í samfélaginu svo sem vaxtareikningi og verslunarreikningi.
- Geri sér grein fyrir að hækkun stærðar um ákveðna prósentu og síðan lækkun um sömu prósentu gefur ekki upphaflegu stærðina.
- Geri sér grein fyrir muninum á prósentuhækkun og raunverulegri hækkun í tölum.

Aðferðir
Markmið að nemendur:

- Beiti stærðfræði í verkefnum sem snerta samskipti einstaklings við samfélagið svo sem skattamál.
- Setji stærðfræðileg hugtök í samhengi við ýmis dagleg viðfangsefni.

Umfjöllun um inntak og vinnubrögð

Prósentureikningur er notaður mjög víða í daglegu lífi og starfi og því þurfa nemendur að ná góðum tökum á honum. En þeir þurfa einnig að skilja vel hvað felst í prósentuhugtakinu. Í þessum kafla er fyrst og fremst upprifjun á ýmsum þáttum prósentureiknings sem nemendur hafa fengist við áður. Nemendur þurfa að fá tækifæri til að beita prósentureikningi í ýmsu samhengi og skoða og meta upplýsingar þar sem upplýsingar eru gefnar í prósentum eða prósentustigum. Mjög algengt er að rangt sé farið með slíkt í fjölmiðlum og að fjallað sé um hækkun í prósentustigum sem hækkun í prósentum og öfugt. Sérstaklega er fjallað um virðisaukaskatt en dæmi eru um að verslunarfólk viti að það á að margfalda verð með álagningu með 1,245 eða 1,07 til þess að finna verð með virðisaukaskatti en geti alls ekki skýrt hvers vegna og enn frekar þegar um er að ræða að finna upphæð virðisaukaskatts og margfaldað er með 0,1968 eða 0,0654. Einnig er farið aðeins í vaxtaútreikninga en nemendur þurfa að fá innsýn í og skilja þau lögmál sem gilda í fjármálaheiminum í dag. Í kaflanum um unglinga og fjármál er farið nánar í ýmsa þætti sem tengjast fjármálum unglinga svo sem skattamál.

Kennsluhugmyndir

Í fyrsta verkefninu í kaflanum er prósentureiturinn notaður. Sjálfsagt er að rifja upp hvernig nýta má hann. Þó að ekki fáist alltaf nákvæmar niðurstöður þegar prósentureitur er notaður eru þær yfirleitt nægilega nákvæmar til daglegra nota. Þegar maður er til dæmis að velta fyrir sér hve mörg prósent af geymslurými harðs disks eru notuð skipta brot úr prósentu litlu máli. Ef um vexti til langs tíma er að ræða geta brot úr prósentum hins vegar skipt miklu máli. Sjálfsagt er að taka þetta til umræðu með nemendum. Viðfangsefni í dæmum 1–5 er geymslurými á hörðum diskum í tölvum. Nemendur geta skoðað geymslurými á eigin tölvum eða tölvum í skólunum. Við slíka athugun getur komið í ljós hvort eitthvað óeðlilegt er að gerast í tölvunni og gott er því að skoða geymslurými á harða diskinum reglulega. Nemendur eru líka margir með tónhlaða (ipod) sem geyma mikið af tónlist og öðrum gögnum og þeir geta einnig skoðað geymslurými þeirra og hve stórt hlutfall þess þeir eru að nota.

Í dæmunum á blaðsíðu 71–72 er sjónum beint að því að prósentur eru notaðar í ýmsu samhengi. Áður en nemendur leysa dæmin mætti láta þá koma með hugmyndir um í hvaða samhengi prósentur eru notaðar. Nota mætti töfluna í dæmi 6 sem grundvöll umræðna. Í hvaða tilvikum gætum við verið að fást við tölur og prósentur eins og þær sem settar eru fram í töflunni? Best væri að varpa töflunni upp, t.d. með mynd- eða skjávarpa, þannig að nemendur hefðu ekki dæmin í bókinni fyrir framan sig en síðan mætti skoða dæmin í bókinni og athuga samhengið sem þar kemur fram. Gott er að nemendur reyni að leysa dæmin hver í sínu lagi. Kennari metur hvort ástæða er til að allir leysi öll dæmin en líkast til eru dæmin ágæt æfing fyrir velflesta nemendur.

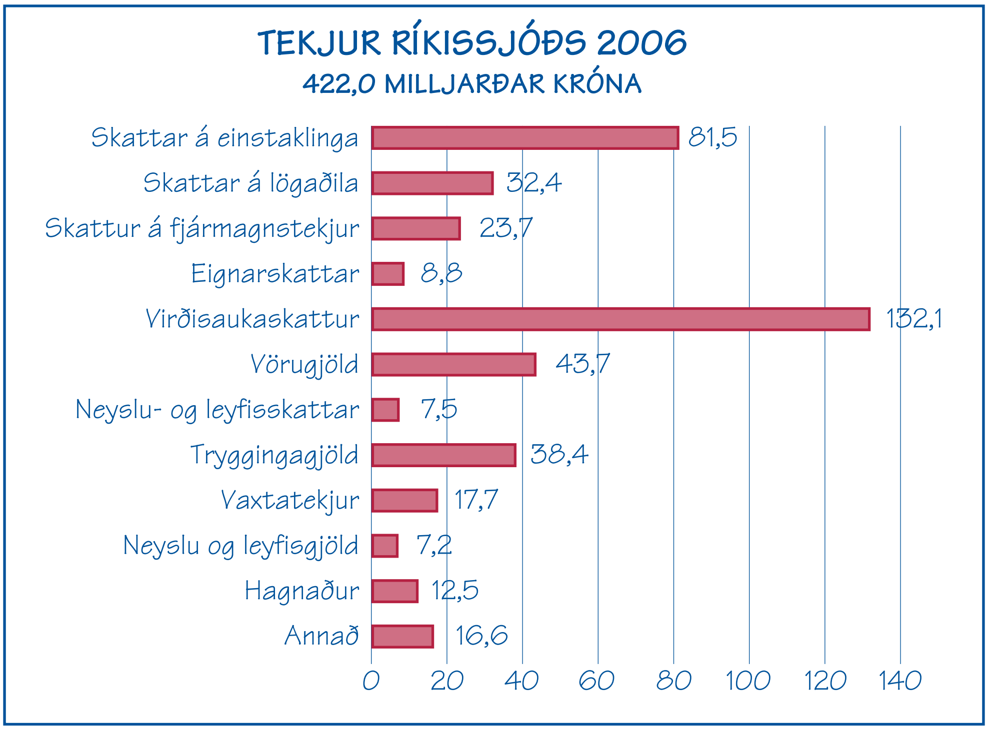
Í tengslum við verðskrá fyrir tónleika gætu nemendur kannað raunveruleg kjör á einhverjum tónleikum sem framundan eru. Þeir gætu haft samband við þá sem standa fyrir tónleikahaldi og leitað eftir upplýsingum um raunverulegan kostnað og tekjur. Síðan má setja upp kostnaðaráætlun fyrir draumatónleikana þeirra.

Í dæmi 20 er sjónum nemenda beint að því að þegar breyta á vöruverði til hækkunar eða lækkunar má fara ýmsar leiðir. Nemendur geta leyst dæmið tveir og tveir saman eða í litlum hópum og síðan mætti ræða sameiginlega um mismunandi leiðir. Líklegt er að fram komi tvær meginleiðir Annars vegar að reikna hækkun eða lækkun sérstaklega og draga síðan frá eða bæta við eftir því sem við á. Hins vegar má finna verð beint með því að velta fyrir sér hve mörg prósent af upphaflega verðinu nýja verðið verður og nota þá prósentutölu við útreikningana. Þetta er nokkuð auðvelt þegar um afslátt er að ræða en nemendum finnst yfirleitt erfiðara að átta sig á að þeir þurfa að reikna með hundrað og eitthvað prósentum þegar um hækkun er að ræða og því þarf að reikna með 1 og bæta síðan tugabrotinu sem táknar prósentuna við.




Í dæmum 21–29 er fengist við virðisaukaskatt en virðisaukaskattur er mikilvægur skattur og má vekja athygli nemenda á því að ríkið fær um 30% af tekjum sínum með innheimtu virðisaukaskatts. Er það mun hærra hlutfall en tekjur af skattlagningu einstaklinga. Nemendur hafa líkast til ekki áttað sig á því að í hvert skipti sem þeir kaupa vöru eða þjónustu eru þeir að greiða skatt í ríkissjóð.

Í þessari töflu kemur fram hvernig tekjur ríkissjóðs skiptust árið 2006 (http://www.rikiskassinn.is/tekjur-rikisins/). Hugsanlega hefur orðið einhver breyting á 2007 en þá var virðisaukaskattur lækkaður á nokkrum vöruflokkum, m.a. matvöru.



Nemendur þurfa að átta sig á að virðisaukaskatturinn er ávallt lagður á síðast og þó virðisaukaskattsprósentan sé t.d. 24,5% þá er upphæð skattsins 19,68% af heildarverði vörunnar. Það má því margfalda heildarverðið með 0,1968 til að finna upphæð virðisaukaskatts en ef leggja á virðisaukaskatt ofan á tiltekna upphæð, t.d. verð með álagningu, má margfalda með 1,245. Þetta er það sem er verið að leggja áherslu á í dæmum 21–29 og þarf að fylgjast vel með nemendum við vinnuna til að tryggja að þeir nái tökum á þessu og geri sér grein fyrir hvað þeir eru að gera og hvers vegna.

Á blaðsíðu 30 eru verkefni þar sem er skoðuð þróun íbúafjölda í Kópavogi. Upplýsingarnar eru fengnar af vef Hagstofu Íslands (www.hagstofa.is) en þar má finna tölur yfir íbúafjölda allra sveitarfélaga á landinu. Í hópverkefninu er gert ráð fyrir að nemendur afli sér upplýsinga um þróun íbúafjölda í sínu eigin sveitarfélagi eða á landinu öllu og beri saman við þróunina í Kópavogi. Nemendur geta að sjálfsögðu skoðað fleiri sveitarfélög en eitt og byrja mætti á hópverkefninu með því að velta fyrir sér hvar nemendur telja að íbúafjöldi hafi breyst einna mest á síðustu 10 árum og hvers vegna. Þeir geta síðan aflað sér upplýsinga um hvort tilgátur þeirra og hugmyndir voru réttar.

Neðst á síðunni eru tölur yfir mannfjölda á jörðinni 31.12.1997 og 31.12.2007. Á Netinu er víða að finna síður sem fylgjast með þróun mannfjölda í heiminum. Hér er slóð að einni slíkri og í gegnum hana má finna fleiri svipaðar síður sem getur verið gaman fyrir nemendur að skoða og bera saman (http://www.ibiblio.org/lunarbin/worldpop).

Á blaðsíðu 76–77 er vaxtareikningur rifjaður upp. Nemendur þurfa að átta sig á að fjármálastofnanir gefa yfirleitt upplýsingar um vexti á ársgrundvelli og að oftast leggjast vextir á innistæður aðeins einu sinni á ári. Þetta reynir á í dæmum 33–39.

Þar sem upphæðin sem er grundvöllur vaxtaútreikningsins breytist ár frá ári getur verið seinlegt að reikna vexti af upphæð sem lögð er inn til ávöxtunar í langan tíma. Því er gott að kunna og skilja þá reiknireglu sem nota má til að reikna út upphæð með t.d. 7,5% vöxtum í nokkur ár. Í dæmi 40 er gert ráð fyrir að nemendur skoði vel töflurnar þar fyrir ofan og noti þær til að skýra regluna. Í tengslum við vexti og vaxtaútreikninga er gott að láta nemendur skoða vel heimasíður bankanna. Þar eru ýmsar reiknivélar sem er tilvalið að nemendur prófi og einnig er þar að finna ýmsar mikilvægar upplýsingar um fjármál, vexti og vaxtakjör. Margir bankar eru með sérstakar síður ætlaðar börnum og unglingum. Farið verður nánar í þetta efni í kaflanum um unglinga og fjármál.

Á síðustu blaðsíðu kaflans er hugtakið prómill kynnt fyrir nemendum. Rétt er að ræða það við nemendur og fá fram dæmi um hvar hugtakið er notað. Líkast til kemur upp umræða um leyfilegt magn áfengis í blóði ökumanna og er sjálfsagt að taka það efni til umræðu þó valið hafi verið að setja ekki slíkt dæmi inn í bókina. Nemendur hafa að líkindum oftast heyrt hugtakið prómill notað í þessu samhengi og því ekki hægt að sneiða fram hjá því. Gagnlegar upplýsingar um efnið er að finna á vef Umferðarstofu (http://www.us.is/id/4328). Rétt er hins vegar að vekja líka athygli á að prómill eru notuð í öðru samhengi eins og reynt er að gera með dæmunum í bókinni.

Síðasta dæmið í kaflanum er gott samantektar- og/eða námsmatsverkefni.

Algebra

Inntak

Markmið að nemendur:

- Geti lýst talna- og rúmfræðimynstrum í því skyni að segja til um framhaldið og finna almenna reglu.
- Þekki dreifireglu og kunni að margfalda upp úr svigum og þátta fyrsta og annars stigs margliður.
- Geti leyst fyrsta stigs jöfnur með einni óþekktri stærð.
- Kynnist því hvernig leysa má einfaldar annars stigs margliður með þáttun.
- Geti notað jöfnur til að leysa margvísleg viðfangsefni.
- Kunni að leysa saman tvær fyrsta stigs jöfnur með tveimur óþekktum stærðum.

Aðferðir

Markmið að nemendur:

- Átti sig á þörf á nákvæmni í stærðfræðilegum texta, bæði í orðanotkun og meðferð stærðfræðilegra hugtaka og tákna.
- Fái þjálfun í rannsakandi vinnubrögðum.
- Þjálfist í að glíma við krefjandi verkefni við hæfi í samstarfi við aðra.

Umfjöllun um inntak og vinnubrögð

Þessi kafli er seinni algebrukaflinn í þessari bók. Hér er því reynt að hnykkja á ýmsum þáttum sem æskilegt er nemendur hafi náð tökum á við lok grunnskóla. Byrjað er á verkefnum þar sem reynir á að nemendur geti fundið almenna reglu út frá talna- og rúmfræðimynstrum og skráð hana með táknmáli stærðfræðinnar. Þetta er eitt af grundvallaratriðum algebrukennslunnar og góð leið til þess að nemendur átti sig á því að nota má algebruna til að lýsa á almennan hátt ýmsum reglum og samböndum sem finna má í umhverfi okkar. Nauðsynlegt er að minna sífellt á þetta því það setur vinnu með tákn og tölur í nýtt samhengi og getur stuðlað að því að nemendur eigi auðveldara með að skilja tilgang algebrunámsins. Nálgun sem þessi gefur einnig tilefni til þess að notuð séu rannsakandi vinnubrögð þar sem farið er frá hinu sértæka til hins almenna.

Í kaflanum er bæði fengist við algebrustæður og fyrsta og annars stigs jöfnur. Nokkur áhersla er á stæður og jöfnur með brotum en rétt er að hafa í huga að til þess að geta fengist við slík viðfangsefni verða nemendur að hafa náð nokkuð góðum tökum á brotareikningi og því er ekki víst að allir nemendur ráði við verkefni af þessum toga. Það má deila um hversu langt á að fara í þessum efnum í grunnskóla og ef litið er til markmiða í námskrá er hér einkum horft til markmiðs sem lýtur að því að nemendur eigi að geta farið með táknasamstæður sem samsettar eru úr tölum og/eða bókstöfum með venjulegum reikniaðgerðum. Það getur engu að síður verið áhugaverð glíma fyrir sterkari nemendur að leysa verkefni sem þessi og þar reynir á að þeir skilji í raun hvað verið er að gera þegar reiknað er með almennum brotum.

Þáttun og margföldun liðastærða er rifjuð upp. Sérstaklega er skoðað samhengið milli tveggja sviga sem margfalda á saman og liðastærðarinnar sem fæst þegar búið er að margfalda þá saman. Góð greining og skilningur á þessu samhengi getur auðveldað nemendum mjög alla vinnu við þáttun en gott er að hafa góð tök á þáttun þegar kemur að því að leysa annars stigs jöfnur. Það er talið ýta undir skilning nemenda að þeir velti fyrir sér dæmum, ræði um samhengi og beri saman lausnir sínar fremur en að leysa mörg dæmi af sama toga. Góð æfing er að nemendur búi sjálfir til liðastærðir eftir tilteknum fyrirmælum og þátti þær síðan eins og gert er á blaðsíðu 88.

Í kaflanum eru annars stig jöfnur og leiðir við að leysa þær teknar til skoðunar. Einungis er fengist við að leysa einfaldar annars stigs jöfnur með því að finna ferningsrót eða þáttun. Kynnt er hvernig leysa má aðeins flóknari jöfnur með því að fylla í ferninginn en það efni er eingöngu ætlað til kynningar og til að beina sjónum að því að þær lausnaleiðir sem kynntar hafa verið eiga eingöngu við um mjög einfaldar annars stigs jöfnur. Ekki er kynnt reglan sem margir kannast við og nota má til að leysa annars stigs jöfnur.

$ax^2 + bx + c = 0$ hefur lausnirnar ef $a = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Meginþorri nemenda er tæpast kominn með þann grunn sem til þarf til að takast á við flóknar annars stigs jöfnur. Þar reynir t.d. mikið á reikning bæði með brotum og óræðum tölum.

Enn og aftur er ástæða til að minna á tölvuforrit (*Flott föll, Geogebra, Garpher*) sem geta auðveldað vinnu nemenda mjög mikið og gert þeim kleift að prófa sig áfram, breyta forsendum og skoða samhengi milli breytinga á einstökum liðum jöfnu og breytinga á grafi hennar. Við annars stigs jöfnur er lögð áhersla á að nemendur þekki einkenni grafs annars stigs jöfnu og að þeir geti séð fyrir sér hvort grafið er uppsveigt eða niðursveigt. Einnig ættu athuganir og rannsóknir, þar sem nemendur teikna gröf annars stigs jafna með því að nota tölvuforrit, að geta beint sjónum þeirra að því að hvað einkennir annars stigs jöfnur sem skera x-ásinn og hafa þar af leiðandi núllstöðvar og hvað einkennir annars stigs jöfnur sem gera það ekki.

Í lok kaflans er rifjað upp hvernig leysa má saman tvær fyrsta stigs jöfnur með tveimur óþekktum stærðum. Þegar leystar eru saman tvær jöfnur er mikilvægt að skoða þær vel og velja þá leið sem hentar best hverju sinni. Reynt er að beina sjónum nemenda að þessu með því að láta þá leysa sömu jöfnur eftir þremur mismunandi leiðum, bera lausnaleiðir saman og velta fyrir sér hvort einhver ein leið sé betri en önnur.

Kennsluhugmyndir

Kaflinn byrjar á hópverkefni þar sem nemendur eiga að finna almenna reglu fyrir flísamynstur. Hópverkefnið er ágætur undanfari að talnarunuverkefnunum á blaðsíðu 80 og í gegnum það gefst tækifæri til að undirstrika að gott er að nota númer myndar eða tölu í runu þegar finna á almennu regluna. Í umræðum má gjarnan draga fram muninn á því að finna næstu tölu í runu á grundvelli síðustu talna á undan og að finna almenna reglu. Einnig er rétt að benda á að mun erfiðara er að finna almennu regluna þegar munurinn á milli talna í talnarunu er ekki sá sami heldur vaxandi eins og kemur fyrir í dæmum 5 og 6.

Í *Talnarunum* sem er einn hlutinn í forritinu *Algebra* (á vefnum Stærðfræði fyrir unglingastig) eru gagnvirk talnarunuverkefni þar sem m.a. er fundin almenn regla.

Í kaflanum er jöfnum höndum fengist við stæður og jöfnur. Eitt af meginmarkmiðunum í algebru við lok grunnskóla er að nemendur geri skýran greinarmun á jöfnu og stæðu. Á blaðsíðu 81 og 82 er fyrst og fremst fengist við stæður og einföldun þeirra. Nemendur hafa sjálfsagt náð misgóðum tökum á þessum atriðum þó hér sé fyrst og fremst um upprifjun að ræða. Því þarf að vega og meta hve mörg dæmi er ástæða til að nemendur leysi hver um sig.

Gott er að taka nokkur dæmi til sameiginlegrar umræðu eða fá fram hjá nemendum hvort þeir telja að einhver dæmi séu erfiðari en önnur og þá hvers vegna. Rétt er að vekja athygli á því að rithátturinn 2x er í raun einföldun á $2 \cdot x$. Margir nemendur eiga auðveldara með að einfalda og stytta brotastæður ef þær eru þáttaðar eins og sýnt er efst á blaðsíðu 82 og því ber að hvetja þá til þess.

Fyrsta stigs jöfnur og lausnir þeirra eru meginviðfangsefnið á blaðsíðum 83–85. Hér er tilefni til að ræða um muninn á jöfnu og stæðu. Tilvalið að gera það annaðhvort í tengslum við dæmi 18 eða dæmi 25 en þar kanna nemendur hvort hægt er að finna gildi fyrir x sem gerir tvær stæður jafngildar eða hvort hægt er að setja upp jöfnu. Í dæmi 25 kemur fram að ekki er hægt að finna gildi fyrir x þannig að stæðurnar $x + 4$ og $x - 5$ verði jafngildar. Nemendur ættu að geta leyst dæmin á þessum blaðsíðum upp á eigin spýtur en mikilvægt er að benda þeim á að skoða dæmin ætíð vel áður en hafist er handa og velta fyrir sér hvort koma má auga á lausn með smá útsjónarsemi án mikilla útreikninga. Í tengslum við dæmi 27 gæti þurft að rifja upp ýmsar forsendur úr hornafræðinni sem fjallað var um í kaflanum um horn.

Á blaðsíðu 86 og 87 er meginviðfangsefnið jöfnur með brotum. Byrjað er á dæmum þar sem nemendur þurfa að leggja saman eða draga frá brot og finna samnefnara. Síðan er kynnt hvernig einfalda má jöfnur með brotum með því að finna samnefnara og margfalda síðan alla liði jöfnunnar í gegn með honum. Hér reynir eins og fram hefur komið á leikni í brotareikningi og gott er að taka nokkur dæmi til sameiginlegrar skoðunar og umræðu eftir að nemendur hafa glímt við að leysa þau hver fyrir sig eða í litlum hópum. Jöfnur eins og í dæmi 34 eru orðnar nokkuð flóknar og ekki víst að þær séu á færi allra nemenda.

Neðst á blaðsíðu 87 eru nokkur dæmi þar sem nemendur þurfa að breyta margfeldi í liðastærð eða para saman liðastærð og margfeldi. Þetta er aðdragandi þess að farið er að skoða liðastærðir og þáttun þeirra á nokkuð skipulegan hátt. Í dæmum 39–41 eru skoðaðar liðastærðir af gerðinni $x^2 - ax + b$, $x^2 - ax - b$ og $x^2 + ax - b$ og nemendur eiga að búa til liðastærð af hverri gerð fyrir sig og þátta hana. Þeir þurfa bæði að velta fyrir sér hvaða aðgerðamerki eiga að vera í svigunum sem og þeim stærðum (bæði óþekktum stærðum og tölustöfum) sem eiga að standa í svigunum. Glósubókinni efst á blaðsíðu 88 er ætlað að beina sjónum þeirra að því sambandi sem er milli liðanna í liðastærðinni og þeirra stærða sem standa í svigunum þegar búið er að þátta. Dæmin henta vel til vinnu í litlum hópum. Nemendur gætu gert veggspjald eða glærukynningu þar sem þeir taka hverja liðastærð fyrir sig og búa til 2–3 liðastærðir af hverri gerð og sýna þáttun þeirra og samhengi á milli liða. Þeir gætu líka tekið liðastærðirnar í dæmi 42 og flokkað þær með sínum eigin dæmum og þáttað. Þeir sjá þá væntanlega að það vantar liðastærð af gerðinni $x^2 + ax + b$ og geta þá bætt henni við. Einnig mætti skipta dæmunum á milli hópa en þá verður að gæta þess að draga vel saman niðurstöður í sameiginlegum umræðum svo nemendur átti sig á mismunandi gerðum liðastærða og hvað þarf að horfa á þegar breyta á liðastærð í margfeldi.

Að þessu loknu er sjónum nemenda beint að liðastærðum sem myndast þegar tveir eins liðir eru margfaldaðir saman. Hér er reynt að láta nemendur greina og lýsa með eigin orðum reglum sem þeir hafa séð og beitt áður.

$$(a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a + b)(a - b) = a^2 + b^2$$

Mikilvægt er að nemendur geri sér grein fyrir að þessar reglur gilda einungis ef stærðirnar í svigunum sem margfalda á saman eru þær sömu. Einnig þarf að huga að því hvort um er að ræða summu, mismun eða hvoru tveggja. Gott er því að bera liðastærðirnar í dæmi 46, 47 og 48 saman við liðastærðirnar í dæmi 42. Það má til dæmis gera áður en nemendur leysa dæmi 49. Einnig er mikilvægt að nemendur átti sig á að það þarf alls ekki að kunna þessar reglur utan að. Það er alltaf hægt að ganga skipulega til verks og margfalda liði saman lið fyrir lið og einfalda síðan og draga saman. Einnig má prófa sig áfram þegar þátta á liðastærðir þó gott sé að átta sig á samhengi svo maður sé ekki að prófa tölur sem eru alveg út í bláinn.

Á blaðsíðu 90 eru aftur stæður og jöfnur með brotum. Hér reynir bæði á leikni í að margfalda saman sviga og inn í sviga og einnig getur þáttun nefnaranna gert lausnir jafnanna mun auðveldari. Hér er aftur minnt á að verkefni sem þessi eiga líkast til ekki erindi til allra nemenda en geta verið ögrandi og skemmtileg glíma fyrir suma.

Annars stigs jöfnur og gröf þeirra eru tekin aftur til skoðunar í þessum kafla. Fyrst eru gefnar nokkrar jöfnur og gröf þeirra teiknuð inn í sama hnitakerfi og eiga nemendur að tengja saman jöfnu og graf. Þetta er gott dæmi til að rifja upp einkenni grafs annars stigs jöfnu og velta fyrir sér hvaða áhrif stuðull við x^2 hefur á grafið. Í hópverkefninu á blaðsíðu 91 er síðan gert ráð fyrir að nemendur kanni skipulega hvaða áhrif það hefur á grafið að að bæta tölu við x^2 og fleiri gerðir af annars stigs jöfnum. Gott getur verið fyrir nemendur að margfalda upp úr svigunum og sjá að $y = (x + 2)^2$ er sama jafnan og $y = x^2 + 4x + 4$. Í framhaldi af því má velta fyrir sér hvaða áhrif það hefur að bæta tiltekinni tölu við jöfnuna eða draga frá eins og t.d. er gert í h-lið og j-lið. Mikilvægt er að nemendur vinni þetta verkefni með því að nota tölvuforrit eins og t.d. *Geogebra* eða grafískan vasareikni.

Nemendur kynnast því hvernig leysa má einfaldar annars stig jöfnur með því að finna ferningsrót eða með því að þátta þær. Þegar leysa á annars stigs jöfnur þarf að finna gildi fyrir x þannig að y verði núll. Þetta er kallað að finna núllstöðvar jöfnunnar eða að finna x-gildin þegar fleygboginn sker x-ásinn. Ekki skera allir fleygbogar x-ásinn og því eiga ekki allar annars stigs jöfnur sér lausn. Nemendur hafa kynnst því áður að annars stigs jöfnur eiga sér enga, eina eða tvær núllstöðvar og hafa lesið núllstöðvar af gröfum en lítið fengist við að finna lausnir á annan hátt. Í dæmi 59 eru x-gildin annaðhvort heil tala eða endanlegt tugabrot og í dæmi 60 má skrá lausnirnar á tvo mismunandi vegu. Nota má vasareikni og finna ferningsrót talnanna en svarið verður óendanlegt tugabrot og því verður að ákvarða fjölda aukastafa. Einnig má skrá svarið $x = \pm\sqrt{7}$ eins og fram kemur í stækkunarglerinu. Það er í raun nákvæmara svar en þegar svarið er skráð með tugabroti með nokkrum aukastöfum. Í dæmi 61 er nokkuð auðvelt að finna lausnir með því að þátta stæðurnar og x-gildin eru heilar tölur

Á blaðsíðu 93 er það kynnt fyrir nemendum hvernig leysa má örlítið flóknari annars stigs jöfnur með aðferð sem kölluð er að fylla í ferninginn. Sú aðferð byggist á því að nokkuð auðvelt er að þátta ferningsstæðir eins þessar

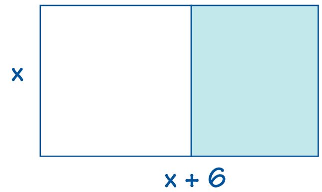
$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)(a + b) = (a + b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)(a - b) = (a - b)^2$$

Þegar búið er að skrá stærðirnar sem margfeldi í öðru veldi má auðveldlega draga ferningsrót af þeim. Því er leitast við að breyta annarri hlið jöfnunnar þannig að skrá megi hana sem ferningsstærð og er það kallað að fylla í ferninginn. Þessi breyting hefur að sjálfsögðu í för með sér að hin hlið jöfnunnar breytist einnig á sama hátt.

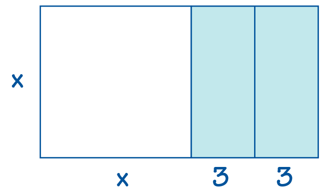
Hér er eitt dæmi sem lýsir aðferðinni myndrænt en það má einnig leysa á einfaldan hátt með þáttun. Gott getur verið fyrir nemendur að sjá dæmi um hvoru tveggja og bera saman.

Leysa á jöfnuna $x^2 + 6x - 7 = 0$

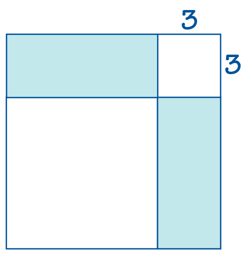
Jafnan er umrituð $x^2 + 6x = 7$
Stæðunni má lýsa með rétthyrningi



Skipta má fletinum 6x upp í $2 \cdot 3x$
og raða þannig að myndist ferningur



Til þess að myndin verði fullkominn ferningur þarf að bæta við $3 \cdot 3$
en það er hálfur stuðullinn við x
í öðru veldi.



Ef við lítum á jöfnuna má sjá að ef við bætum 3^2 við vinstri hliðina má þátta hana og skrá sem $(x + 3)^2$. Við þurfum að sjálfsögðu einnig að bæta 3^2 við hægri hlið jöfnunnar.

$x^2 + 6x + 3^2 = 7 + 3^2$

$(x + 3)^2 = 16$ — Nú getum við dregið ferningsrót af báðum hliðum jöfnunnar.

$x+3 = \pm 4$

Lausnir jöfnunnar eru því $x = 1$ og $x = -7$

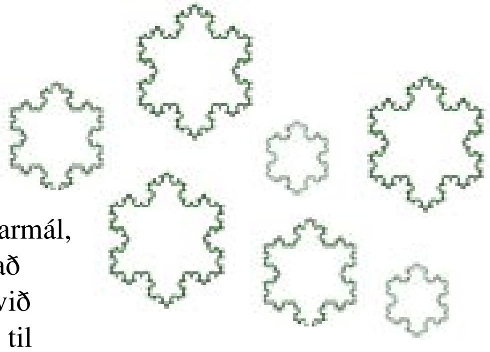
Ef við leysum jöfnuna $x^2 + 6x - 7 = 0$ með þáttun fáum við $(x + 7)(x - 1) = 0$ sem er sama lausn eða að $x = -7$ og $x = 1$

Þessi aðferð er sett fram hér fyrst og fremst til kynningar og til þess að vekja athygli á því að ekki er hægt að leysa allar annars stigs jöfnur með þeim einföldu aðferðum sem nemendur ráða nú yfir. Þetta er efni sem eingöngu hentar nemendum sem þegar hafa náð góðum tökum á bæði fyrsta og annars stigs jöfnum.

Verkefni á síðustu tveimur blaðsíðum kaflans eru upprifjun á leiðum sem nota má til að leysa saman tvær jöfnur með tveimur óþekktum stærðum. Æskilegt er að nemendur leysi dæmi 63 eftir þeim þremur mismunandi leiðum sem kynntar eru og að síðan sé rætt um hvaða leið þeir telja heppilegast að beita í hverju tilviki. Þeir velja síðan sjálfir þá leið sem þeir telja best að fara við að leysa hvern lið í dæmi 64. Mikilvægt er að hvetja nemendur til að skoða dæmin vel og velja þá leið sem þeir telja að henti best að nota í hverju tilviki fyrir sig. Að sjálfsögðu getur verið einstaklingsbundið hvaða leiðir nemendur telja bestar eða að þeir geti náð góðum tökum á. En það er einnig gott að beina þeim inn á að skoða hvort t.d. sé auðvelt að beita innsetningu eða að lengja aðra jöfnuna svo að leggja megi saman þannig að önnur óþekkta stærðin hverfi.

Brotalar

Umfjöllun um inntak og vinnubrögð



Í kennslubókinni eru ekki sett fram sérstök markmið fyrir nemendur með kaflanum um brotala. Þegar kaflinn er skoðaður er augljóst að þar gefst nemendum tækifæri til að fást við og skerpa skilning sinn á ýmsum þáttum stærðfræðinnar og má þar nefna hlutföll, ummál, flatarmál, algebru og röksemdafærslu. Einnig er augljóst að efnið vekur athygli á tengslum stærðfræðinnar við aðrar greinar. Efnið var þó fyrst og fremst valið til þess að sýna nemendum fram á að stærðfræðin er lifandi fræðigrein þar sem sífellt er verið að gera nýjar uppgötvanir og að tölvutæknin hefur skapað ýmsa nýja möguleika á þessu sviði. Margar nýjar uppgötvanir á sviði stærðfræðinnar eru það flóknar að ekki er auðvelt fyrir nemendur á þessu stigi að setja sig inn í þær en brotalar eru dæmi um viðfangsefni þar sem nemendur geta áttað sig á meginhugmyndum þó að þeir ráði ekki við alla þá stærðfræði sem býr að baki. Einnig er efnið mjög myndrænt og brotalar eru töluvert notaðir í alls kyns tölvugrafík sem sjá má í tölvuleikjum, kvikmyndum og myndskreytingum og því er líklegt að nemendur hafi einhvers staðar rekist á slíkar myndir. Brotalinn neðst á blaðsíðu 96 er til dæmis kallaður Jurassic Park brotalinn. Hann var notaður víða í ýmsum formum til skreytingar í bókinni *Jurassic Park* eftir Michael Crichton en eftir henni var gerð kvikmyndin *Jurassic Park* (Júragarðurinn).

Víða í bókaflokknum *Átta-10* eru brot úr sögu stærðfræðinnar. Margar af merkustu uppgötvunum stærðfræðinnar eiga sér langa sögu og því geta nemendur fengið þá hugmynd að stærðfræðin hafi lítið þróast frá tímum forngrísku stærðfræðinganna. Hér fyrir neðan eru helstu sögubrotin í bókaflokknum sett í tímaröð. Þar má sjá að tímabilið frá um 600–200 f.Kr. er mikið blómaskeið. Síðan virðist lítið gerast fyrr en á 16.–18. öld.

Rétt er að ítreka að sögubrotin í bókunum eru engan veginn tæmandi þótt komið sé inn á margar af þeim uppgötvunum sem móta þá stærðfræði sem fengist er við í grunnskólum í dag. Skemmtilegt getur verið að kafa dýpra í sögu stærðfræðinnar. Bók Jóns Þorvarðarsonar *Og ég skal hreyfa jörðina* gefur mjög góða innsýn í sögu forngrísku stærðfræðinganna og einnig eru til margar erlendar bækur um sögu stærðfræðinnar sem finna má m.a. á bókasafni KHÍ. Kristín Bjarnadóttir hefur rannsakað sögu stærðfræðikennslu á Íslandi. Grein eftir hana, sem heitir *Nokkur tímamót í sögu íslenskrar stærðfræðimenntunar*, birtist í *Tímariti um menntarannsóknir* 4. árgangi 2007. Greinin gefur ágætt yfirlit yfir þróun mála hér á landi og sjálfsagt er fyrir kennara að kynna sér hana.

Pýþagóras, (f. 579 f.Kr.) og lærisveinar hans lögðu stund á stærðfræði og gerðu þeir ýmsar merkar uppgötvanir á sviði stærðfræðinnar en langþekktust þeirra er setning Pýþagórasar. Samkvæmt henni er summan af ferningum skammhliðanna í rétthyrndum þríhyrning jöfn ferningi langhliðarinnar. Ýmsir aðrir höfðu komið auga á þetta samband en Pýþagóras var fyrstur til að sanna það óhrekjanlega.

Zenon for Eleu var uppi 490–425 f.Kr. Er hann þekktur fyrir að hafa sett fram skemmtilegar þversagnir sem virðast standa en brjóta samt gegn heilbrigðri skynsemi. Ein þeirra var að skjaldbaka myndi alltaf sigra þrautþjálfaðan íþróttamann í kapphlaupi svo framarlega sem hún fengi að byrja með visst forskot.

Gríski heimspekingurinn *Platón* (427–347 f.Kr.) fékkst við ýmis stærðfræðileg viðfangsefni, m.a. á sviði rúmfræði. Talið er að hann hafi uppgötvað að einungis væri hægt að búa til fimm mismunandi reglulega margflötunga og eru þeir oft kenndir við hann. Einnig var hann heillaður af ákveðnum gerðum rétthyrndra þríhyrninga sem myndast þegar jafnhliða þríhyrningum er skipt upp í minni þríhyrninga með því að draga hornalínur þeirra.

Erathostehnes (276–194 f.Kr.) fann upp leið til að finna allar frumtölur á tilteknu talnabili. Leiðin er kölluð sáldur Eratosþenesar. Einnig gerði hann ýmsar aðrar merkar uppfinningar á sviði stærðfræði og vísinda svo sem að mæla ummál jarðar og skrá upplýsingar um stjörnurnar.

Arkímedes (287–212 f.Kr.) fékkst m.a. við rannsóknir á hringjum og glímdi hann við að skrá hlutfallið milli ummáls og þvermáls hrings af sem mestri nákvæmni. Hann komst að því að hlutfallið lægi á milli $\frac{223}{7}$ og $\frac{22}{7}$.

Kínverjinn Zu Chongzhi náði um 480 að skrá hlutfallið upp á einn milljónasta og Viete tókst á 16 öld að skrá það enn nákvæmar.

Brahmagupta setti árið 628 fram fyrsta táknið fyrir neikvæðar tölur en hugmyndir um þær höfðu þó komið fram löngu fyrr eða á fjórðu öld fyrir Krist hjá kínverjanum *Jiu Zhang Suanshu*.

René Descartes (1596–1650) vann að rannsóknum á framþróun algebrunnar og var frumkvöðull að því að nota rétthyrnt hnitakerfi til að kanna og lýsa rúmfræðilegum eiginleikum

Tugabrot voru fyrst kynnt í ritinu *De thiende* árið 1585 en höfundur þess var *Simon Stevin*.

Stærðfræðingurinn *Leonar Euler* (1707–1783) er talinn hafa verið einn af merkustu stærðfræðingum 18. aldar. Eitt lítið dæmi um uppgötvanir hans er regla sem kennd er við hann og fjallar um samhengið milli fjölda brúna, horna og flata í reglulegum margflötungum. H – B + F = 2. Einnig er hann þekktur fyrir að hafa fundið lausn á þraut sem kennd er við brýnar í Königsberg.

Gauss (1777–1855) var mikill stærðfræðingur og er hann af mörgum talinn einn merkasti stærðfræðingur síðari tíma. Margir hafa heyrt um fyrsta afrek hans á sviði stærðfræðinnar, sem hann vann sem barn að aldri, en það fólst í því að finna upp reglu sem nota má til að finna summu náttúrlegu talnanna frá 1–100. Beita má reglunni til að finna summu n fyrstu náttúrlegu talnanna. Fjallað er um Gauss í bókinni *Mæling heimsins* eftir Daniel Kehlmann sem kom út hér á landi árið 2007.

Cantor og Dedekind tókst á 19. öld að lýsa óræðum tölum án rúmfræði og þá fengu þær loks viðurkenningu sem sjálfstæðar tölur.

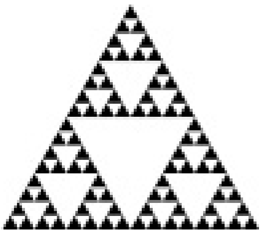
Niels Fabian Helge von Koch (1870–1929) var sænskur stærðfræðingur. Koch-snjóflygsan er kennd við hann en talið er að hún hafi verið einn fyrsti brotalinn sem lýst var nákvæmlega á stærðfræðilegan hátt. Það gerði Koch árið 1904. Annað meginframlag von Koch var á sviði talnafræðinnar en þar fékkst hann meðal annars við rannsóknir á frumtölum.

Niels Henrik Abel (1902–1929) er talinn þekktasti stærðfræðingur Norðurlanda og er talið að hann hafir rutt brautina og opnað fyrir rannsóknir á ýmsum nýjum sviðum.

Wacław Franciszek Sierpiński (1882–1969) var pólskur stærðfræðingur. Sierpiński-þríhyrningurinn er kenndur við hann en einnig eru til Sierpiński-teppi og Sierpiński-ferlar. Auk rannsókna á brotölum fékkst hann einnig við rannsóknir á fleiri sviðum svo sem mengjafræði. Hann samdi yfir 700 greinar um rannsóknir sínar og skrifaði 50 bækur.

Eitt þeirra viðfangsefna sem bæði stærðfræðingar og leikmenn hafa glímt við fram til þessa er að finna fimmhyrninga sem geta þakið flöt. Síðasta uppgötvunin á þessu sviði var gerð árið 1985 og eru nú þekktir 14 slíkir fimmhyrningar. Athygli vakti þegar kona að nafni *Marjorie Rice* uppgötvaði fjóra slíka nokkrum árum áður en hún var fyrst og fremst áhugamanneskja á þessu sviði.

Kennsluhugmyndir



Hefja má vinnu með efnið með því að ræða við nemendur um sögu stærðfræðinnar og rifja upp einhver af þeim sögubrotum sem finna má í bókaflokknum. Í framhaldi af því er æskilegt að nemendur lesi og ræði saman um textann á blaðsíðu 96. Verkefnin á blaðsíðu 97–99 geta nemendur síðan unnið saman tveir og tveir en einnig mætti skipta hópnum þannig að helmingur fengist við Sierpinski-þríhyrninginn eða verkefni 1–3 og helmingur við Koch-snjóflygsuna eða verkefni 4–6. Verkefni 7 um flatarmál Koch-snjóflygsunnar væri síðan gott að taka til sameiginlegrar skoðunar eða láta nemendur glíma við það í hópum.

Á blaðsíðu 101 eru hugmyndir að nokkrum hópverkefnum og er gert ráð fyrir að nemendur velji sér eitt þeirra til að vinna í litlum hópi en bent er á að verkefni 11 er tilvalið bekkjarverkefni. Á Netinu er að finna ýmis forrit þar sem sjá má að brotalar myndast skref fyrir skref. Sum þeirra geta verið svolítið flókin en einfaldar útgáfur er að finna á síðu *National Library of Virtual Manipulatives* http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html. Sjálfsagt er að benda nemendum á að skoða þessi forrit og leita sér upplýsinga um brotala (fractals) á Netinu. Einnig má finna fjölmargar skemmtilegar myndir á Netinu þar sem notaðir eru brotalar.

NÁMSGAGNASTOFNUN 2008 – Kennsluleiðbeiningar – 09847

Unglingar og fjármál

Inntak
Markmið að nemendur:

- Geti notað stærðfræði til að átta sig á fjármálum einstaklinga og heimila.
- Kunni að nota töflureikni við útreikninga og úrvinnslu upplýsinga.
- Þjálfist í að beita prósentureikningi í ýmsu samhengi.
- Þekki dæmi um hvernig hugtakið vísitala er notað.

Aðferðir
Markmið að nemendur:

- Geti notað stærðfræði til að henda reiður á eigin fjármálum og fjármálum heimilis.
- Geti beitt stærðfræði við verkefni sem varða samskipti við samfélagið svo sem í umræðum um kjaramál og stjórnmál.

Umfjöllun um inntak og vinnubrögð

Unglingar eru stór neysluhópur og því er stundum haldið fram að þeir ráði töluverðu um hvað er keypt á heimilum. Verslanir og fjármálafyrirtæki taka mið af þessu og beina sjónum sínum að þeim í auglýsingum sínum og markaðssetningu. Það er því mikilvægt að unglingar öðlist einhverja þekkingu á fjármálum. Þeir þurfa að gera sér grein fyrir gildi þess að hafa yfirsýn yfir eigin fjármál. Jafnframt þurfa þeir að gera sér einhverja grein fyrir áhrifamætti peninga og þekkja dæmi um áhrif peninga á daglegt líf í hverju samfélagi.

Oft þarf að taka tillit til fjárhagsstöðu þegar taka á ákvarðanir. Það er mikilvægt að unglingar viti hve víða í samfélagi peningar koma við sögu. Öllum Íslendingum er ætlað að geta áttað sig á fjármálum íslenska ríkisins og hafa skoðanir á hvernig stjórna eigi landinu. Nemendur þurfa því að kynnast hugmyndum um skattheimtu og hvernig verja eigi skatttekjum. Einnig má telja það hluta af almennri menntun á Íslandi að nemendur geri sér grein fyrir hvaða tækjum íslenska ríkið beitir við efnahagsstjórnun og áhrifum stjórnvaldsaðgerða á líf landsmanna.

Í kaflanum er sjónum beint að unglingum sem launþegum. Sett hafa verið lög og gerðir samningar um vinnu unglinga. Margir unglingar stunda launavinnu og þurfa þeir að þekkja réttindi og skyldur launþega. Það er hluti af því að geta axlað ábyrgð á eigin lífi og skilja vinnumarkaðinn. Samkvæmt lögum skulu tilteknar upplýsingar koma fram á launaseðlum og er þýðingarmikið að allir launþegar skilji hvernig þeir eru byggðir upp og hvaða útreikningar liggja að baki. Á launaseðlum skulu koma fram upplýsingar bæði um tekjur og gjöld sem reiknuð hafa verið á grundvelli kjarasamninga og laga um skattheimtu og lífeyrisgreiðslur. Allir þurfa að gera sér grein fyrir mikilvægi þess að hafa yfirsýn yfir eigin fjármál. Töluverðir peningar fara um hendur unglinga og þeir þurfa að þekkja leiðir til að ráðstafa peningum og ávaxta þá. Bankar og fjármálafyrirtæki bjóða upp á ýmsar leiðir til að ávaxta peninga sem viðskiptavinir þurfa að gera sér grein fyrir í hverju felast. Unglingar þurfa jafnframt að átta sig á eigin stöðu og meta út frá henni hvað eru góðir ávöxtunarmöguleikar. Margir Íslendingar velja að taka lán í stað þess að bíða og spara. Gott er að skoða með nemendum hvað það kostar að taka lán og hvaða sparnaðarleiðir eru mögulegar. Þessi viðfangsefni gefa tækifæri til að vinna með raunveruleg verkefni í prósentu- og veldareikningi.

Fleira en laun hefur áhrif á hvernig afkoma fólks er. Þróun verðlags hefur mikil áhrif á kaupmátt eða kannski frekar samspil í þróun verðlags og þróun launa. Þróun verðlags er mæld með vísitölu neysluverðs. Hagstofa Íslands sér um slíkar mælingar. Á heimasíðu hennar (http://www.hagstofan.is) er að finna margvíslegar upplýsingar og þar má sækja viðbótarupplýsingar við þær sem fram koma í námsefninu. Nemendur geta unnið sjálfstæð verkefni þar sem þeir rannsaka þróun á vísitölu neysluverðs og launa.

Á vísindavefnum er að finna svar við spurningunni: Hvað er vísitala? Þar fjallar Gylfi Magnússon um hugtakið og gerir síðan sérstaklega grein fyrir vísitölu neysluverðs. (*Vísindavefurinn* 13.6.2001. http://visindavefur.is/?id=1698). Þar kemur fram að vísitölur eru meðaltöl þar sem vegnar eru saman stærðir og skráðar með einni tölu. Vísitölur eru notaðar sem mælikvarði fyrir þróun á ýmsum sviðum. Mikilvægt er að fólk geri sér grein fyrir hvernig nýta má vísitölur til að fá tilfinningu fyrir þróun en jafnframt að þær segja lítið um einstaka þætti. Við útreikninga á vísitölu er gengið út frá tilteknum forsendum sem taka þarf mið af við mat á niðurstöðum. Við útreikninga á vísitölu neysluverðs er reiknaður út kostnaður meðalfjölskyldu við að kaupa vörur og þjónustu á tilteknum tíma. Árið 1997 var gerð stór könnun á neysluvenjum íslenskra fjölskylda og út frá þeirri könnun var sett upp dæmigerð neysla meðalfjölskyldunnar. Hún var notuð sem grunnur að vísitölu neysluverðs í mars 1997 og var vísitala verðs á neyslu meðalfjölskyldunnar sett á 100. Síðan eru reglulega gerðar kannanir á neyslu meðalfjölskyldu og kannað hvernig neyslan og kostnaður við hana þróast.

Mikilvægt er að hafa í huga að vísitölur eru ófullkomnir mælikvarðar. Erfitt er að finna forsendur sem gilda fyrir alla einstaklinga í samfélaginu. Útgjöld heimila fara eftir mörgum þáttum eins og búsetu, fjölskyldustærð, tekjum, áhugamálum og aldri. Verð á einstökum vörum og þjónustu er mismunandi og því þarf að nota meðalverð sem gefur ekki alltaf rétta mynd af kostnaði hvers og eins. En eftir sem áður liggja miklar upplýsingar og vísbendingar í vísitölum. Slík þekking nýtist vel stjórnvöldum við ákvarðanir um skattlagningu og ýmsa aðra þætti við stjórnun efnahagsmála.

Þó það sé misjafnt eftir fjölskyldum hvernig útgjöld heimilisins skiptast eru margir liðir þeir sömu. Það er hluti af því að gera sér grein fyrir eigin fjármálastöðu að vita hvernig útgjöld eigin heimilis skiptast. Það gefur fólki yfirsýn yfir eigin neyslu og þannig getur fólk betur greint neyslu sína og náð betri árangri í að stjórna henni. Það er mikilvæg forsenda fyrir því að geta metið möguleika á sparnaði eða getu til að borga af lánum að hafa yfirsýn yfir fjármál sín.

Kennsluhugmyndir

Þennan kafla má nýta á ýmsa vegu. Það er kjörið að samþætta efni hans við efni úr samfélagsgreinum um réttindi og skyldur einstaklinga í lýðræðisamfélagi, um stöðu launþega, um fjölskylduna eða um neyslusamfélagið. Tækifæri gefst til að velta fyrir sér mismunandi kjörum fólks og læra um áhrif laga og reglugerða.

Kaflinn er hafður síðastur í bókinni því hugmyndin er að nemendur bæti færni sína til að taka ábyrgð á eigin fjármálum og að þeir átti sig á áhrifum fjárhagslegra ákvarðana í samfélaginu á fjármál einstaklinga og fjölskyldna. Nemendur eru að ljúka skyldunámi og flestir þeirra eru á leið í sumarvinnu og því ætti efni kaflans að höfða til þeirra. Sumir nemenda þurfa auk þess að flytja að heiman til að fara í framhaldsskóla og margir þeirra sjá að mestu sjálfir um eigin fjármál.

Þar sem margir unglingar gera sér ekki grein fyrir eigin neyslu gæti verið góð hugmynd að byrja á því að kenna þeim að færa bókhald um tekjur og útgjöld í töflureikni. Þeir halda síðan bókhald meðan vinna við kaflann stendur yfir.

Kaflinn byrjar á umræðum um hvenær fjármál hafa áhrif á ákvarðanir ólíkra hópa í samfélaginu. Það er mikilvægt að nemendur taki ábyrgð á eigin fjármálum en jafnframt þurfa þeir að átta sig á að þeir eru hluti af samfélagi og að þeir þurfa að þroska með sér tilfinningu sem gerir þeim kleift að skoða og ræða mál án þess að miða við eigin aðstæður. Fyrsta rannsóknarverkefnið er að kanna eyðslu annarra unglinga og hvernig þeir fá fé til eigin neyslu. Áhugavert gæti verið að skólar hefðu samvinnu um þetta verkefni. Hver skóli gæti þá safnað gögnum innan sinna vébanda og sent í annan eða aðra skóla. Hann fengi í staðinn gögn annars staðar frá. Það gæfi nemendum tækifæri til að bera saman kjör unglinga á ólíkum stöðum á landinu.

Margir unglingar vinna með skóla. Verkefnin á bls. 103–105 má vel aðlaga að raunverulegum aðstæðum. Nemendur gætu þá nýtt dæmin en breytt þeim í samræmi við aðstæður í eigin sveitarfélagi. Verkefnin snúast um að reikna út laun út frá launatöxtum. Fléttaður er inn prósentureikningur og notkun myndrita. Á launaseðlum koma fram launa- og frádráttarliðir. Við útreikning á þeim þarf að beita ýmsum útreikningum. Einhverjir nemendur gætu fengið það verkefni að setja upp í töflureikni reiknilíkan fyrir launaseðil sem nota mætti til að reikna út laun mismunandi einstaklinga. Í þemaheftinu *Töflureiknir notaður* er að finna ýmsar upplýsingar um notkun töflureiknisins *Excel*. Á bls. 105 eru sýndar reglur um vinnutíma unglinga sem gott er að þeir þekki. Þar eru unglingar einnig hvattir til að kynna sér réttindi sín. Kjörið er að fá heimsókn frá stéttarfélagi eða að nemendur fari í heimsókn til stéttarfélags og kynni sér hvernig unnið er þar.

Flestir reyna að ávaxta fé sitt. Ýmsar leiðir eru til að ávaxta peninga en algengast er að almenningur noti banka og fjármálafyrirtæki. Nokkuð flókið er að reikna út ávöxtun af reglulegum sparnaði. Á bls. 106 er fjallað um hvernig farið er að. Ef lögð er inn upphæð í hverjum mánuði eru reiknaðir vextir af hverrri upphæð fram að áramótum en þá er öllum safnað saman. Eftir það eru reiknaðir vextir af upphæð um áramót en farið á sama hátt með það sem bætist við. Fara þarf í gegnum þetta með nemendum og skoða nokkur dæmi. Auðveldast er að gera það með því að kennari noti töflureikni og að nemendur geti fylgt hverju skrefi. Dæmi 11–14 er heppilegast að vinna í töflureikni og því væri gott að fara með nemendahóp í tölvustofu þegar fengist er við viðfangsefni á bls. 106–107. Einhverjir nemendur gætu haft áhuga á að kynna sér hlutabréfamarkaðinn og skoða hvernig upplýsingar um þróun hans eru settar fram af fjármálafyrirtækjum.

Fjármálastaða heimilanna er viðfangsefni dæma á bls. 108–110. Í dæmunum reynir á skilning nemenda á prósentum og samsettum útreikningum. Valdar hafa verið nokkrar upplýsingar úr gagnagrunni Hagstofu Íslands en þar er margt áhugavert að finna sem nemendur gætu haft gagn og gaman af að skoða. Það skerpir talnaskilning og tilfinningu fyrir myndritum að ná í gögn og skoða þá mismunandi framsetningarmáta sem um er að ræða. Fyrst er skoðuð vísitala neysluverðs. Vísitala neysluverðs á Íslandi hefur hækkað um 50% á árunum 1997–2007 meðan launavísitala helstu launþegahópa hefur hækkað um helming. Þessar tölur er áhugavert að skoða. Við útreikning á vísitölu neysluverðs er stuðst við flokkun á helstu neysluvörum. Í dæmum 17 og 18 eru flokkarnir skoðaðir og síðan tekin dæmi um einstakar vörur innan flokanna. Það gefur tilefni til að nemendur geti dýpkað skilning sinn á því hvaða upplýsingar vísitala neysluverðs gefur. Í dæmi 19 er valið að skoða þróun húsnæðiskostnaðar sérstaklega. Þessi þróun hefur verið ólík eftir búsetusvæðum en hér er miðað við landið allt. Fæstar fjölskyldur nota fjármuni sína nákvæmlega eins og vísitölufjölskyldan og það fer sjálfsagt eitthvað eftir fjármálastöðu hvernig útgjöld skiptast. En ágætt er fyrir unglinga að átta sig á hvaða liðir vega þungt í pyngju fjölskyldnanna í landinu og hvað það raunverulega kostar að reka heimili. Stungið er upp á að þeir ræði við einstaklinga frá nokkrum heimilum og er það gert til að þeir tengi efnið við eigið umhverfi og fái tækifæri til sjálfstæðrar úrvinnslu á efni kaflans.

Í lok kaflans er gert ráð fyrir hópumræðum um áhrif stjórnvaldsaðgerða. Þar gefst nemendum tækifæri til að tengja efni kaflans saman og gera sér grein fyrir hversu mikilvægar ákvarðanir stjórnvalda eru fyrir fjárhag heimilanna í landinu. Þessar umræður gætu auðveldlega orðið pólítískar en gott er að almenningur geri sér grein fyrir hvernig lög og reglugerðir hafa ólík áhrif á afkomu hópa í samfélaginu. Eitt af meginmarkmiðum grunnskólans er að styðja nemendur í að taka þátt í lýðræðissamfélagi okkar og vinna við þennan kafla ætti að styrkja nemendur í því.