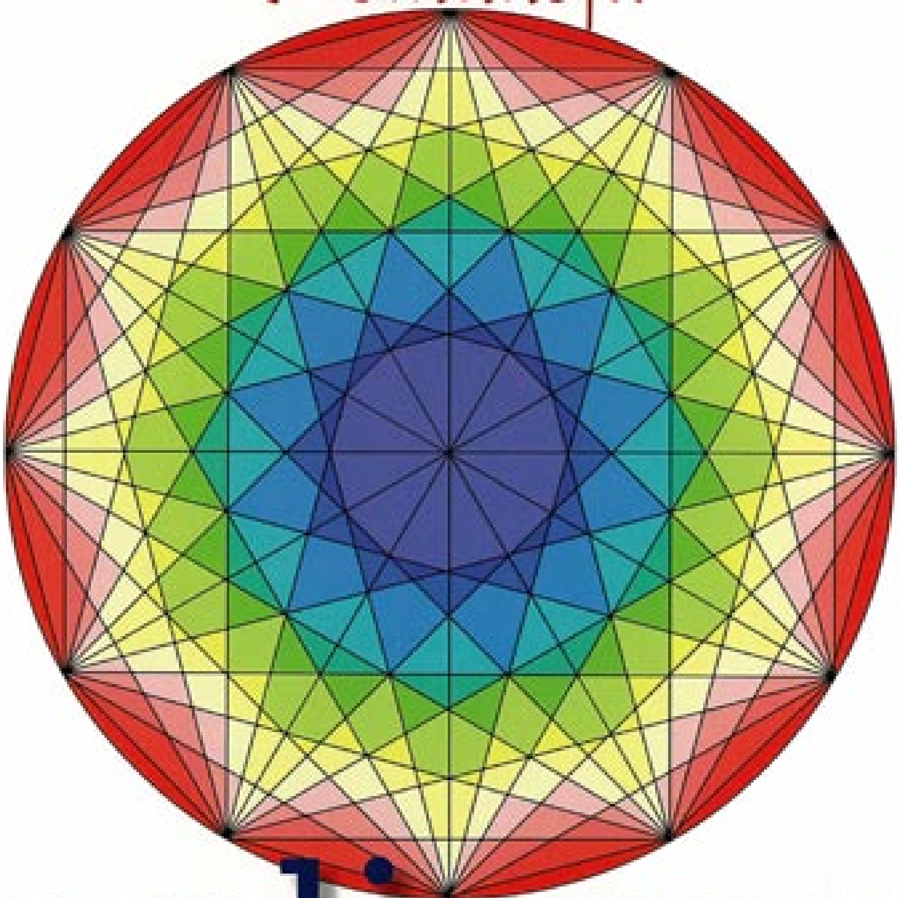
Þemahefti



pælingar

í stærðfræði

Kennsluleiðbeiningar

Námsgagnastofnun

19. maí 2008
09783

Efnisyfirlit

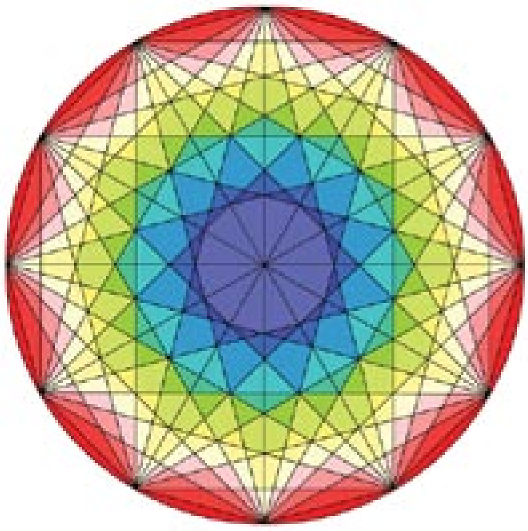
Pælingar í stærðfræði
Kennsluleiðbeiningar

Ritstjóri: Hafdís Finnbogadóttir

1. útgáfa 2008
Námsgagnastofnun

Umbrot og útlit: Námsgagnastofnun
09783

Inngangur



Efni þemaheftisins er einkum hugsað sem skemmtilegar pælingar og þjálfun í rökhugsun og skipulegum vinnubrögðum. Sum verkefnanna tengjast daglegu lífi nemenda en önnur snúast fyrst og fremst um stærðfræðilegar rannsóknir og að geta sett fram almenna reglu fyrir tiltekið samband.

Markmið er að nemendur

- hafi öðlast færni til að takast á við stærðfræðileg verkefni og þrautir og geti rökstutt niðurstöður sínar og skýrt lausnarleiðir
- geti spurt spurninga og tekið þátt í samræðum um stærðfræðileg efni í því skyni að öðlast betri skilning á hugtökum og aðferðum og geri sér grein fyrir að samræða við annað fólk um stærðfræðileg efni er mikilvægur þáttur í að öðlast slíkan skilning
- geti samið eigin þrautir og hafi þjálfast í því að koma auga á verkefni í umhverfinu sem bjóða upp á stærðfræðilegar lausnir
- hafi þjálfast í samstarfi við aðra í glímu við krefjandi stærðfræðiverkefni við sitt hæfi og kynnst kostum samvinnu
- geti gert sér stærðfræðileg hugtök skiljanlegri með því að setja þau í samband við hversdagslega hluti
- geti beitt stærðfræði við verkefni sem varða samskipti við samfélagið, svo sem við áætlanagerð út frá gefnum upplýsingum
- geti lýst regluleika í talna- og rúmfræðimynstrum með táknmáli algebru

Í inngangi að umfjöllun um stærðfræði í 8.–10. bekk í aðalnámskrá grunnskóla er rætt um að þótt margir unglingar hafi náð góðu valdi á óhlutbundinni hugsun þurfi að gæta tengingar við fyrri reynslu þegar unnið er með ný hugtök og aðferðir. Lögð er áhersla á að nemendur fái viðfangsefni sem hafa merkingu í huga þeirra og að gagnlegt geti verið að teikna myndir og grípa til áþreifanlegra hluta til skýringa á lausnum. Þar er líka lögð áhersla á samvinnu nemenda og að þeir geti tjáð sig skilmerkilega og tekið þátt í umræðum um stærðfræðileg efni. Einnig er fjallað um mikilvægi þess að fá að vinna að raunhæfum og jafnframt krefjandi og ögrandi verkefnum sem fela í sér athuganir, stærðfræðilega úrvinnslu og túlkun niðurstaðna.

Í kaflanum um lausnir verkefna og þrauta í námskrá segir:

> Á unglingastigi ættu nemendur að hafa öðlast góða þjálfun í viðurkenndum aðferðum við lausn ýmissa þrauta og verkefna. Gildir það bæði um hefðbundin orðadæmi og viðamikil samsett úrlausnarefni sem þarfnast yfirlegu og jafnvel samvinnu nemenda. Hver og einn nemandi ætti að hafa fengið tækifæri til að fást á eigin spýtur við erfið og krefjandi verkefni sem hæfa getu hans. Nemendur hafi kynnst því að einnig má draga lærdóm af röngum niðurstöðum og fái trú á stærðfræði sem tæki til að leysa erfið verkefni. Markmiðið er að nemendur skilji að unnt er að leysa verkefni af margs konar tagi þótt ekki liggi leiðbeiningar fyrir um hvernig tiltekið verkefni skuli leyst.
>
> (*Aðalnámskrá grunnskóla, stærðfræði, 2007*, bls. 34–35)

Verkefnin í heftinu reyna flest á þá þætti sem hér hafa verið nefndir. Mörg þeirra reyna á að finna reglu eða samband milli ólíkra þátta. Í verkefnum um dularfullu rósina, flísalögn og að þekja með dómínókubbi eru nemendur jafnframt hvattir til að setja fram almenna reglu sem gildir fyrir hvaða fjölda (n) sem er. Þrjú verkefni (um ferðalag, jól og fjallahjól) eru þess eðlis að nemendur þurfa að leita upplýsinga og gefa sér forsendur við útreikninga sína. Þá er mikilvægt að þeir vinni skipulega og skrái hjá sér þær upplýsingar sem þeir afla. Þeir þurfa líka að rökstyðja hvers vegna þeir velja að nota þær forsendur sem þeir gefa sér. Við slík verkefni reynir á samvinnu og verkaskiptingu nemenda.

Kennarinn gegnir lykilhlutverki í verkefnavinnu sem þessari. Hann þarf að vekja áhuga nemenda með því að skoða verkefnin með þeim í upphafi og skapa umræður um þau. Áhugi hans á viðfangsefninu hefur áhrif á hugmyndir nemenda og ef kennarinn tekur virkan þátt í vinnunni með þeim er líklegt að það hvetji þá til frekari rannsókna og þess að leita nýrra leiða við lausnir sínar. Verkefnin eru öll þess eðlis að ekki er auðvelt að gera sér grein fyrir lausnaleið fyrirfram og hægt er að nálgast þau á ólíka vegu. Sum þeirra hafa líka margar mögulegar lausnir. Það gefur kennaranum tækifæri til þess að fást við verkefnin með nemendum á jafningjagrundvelli. Í lok verkefnis er mikilvægt að nemendur kynni lausnir sínar fyrir öðrum. Þá ætti að leggja áherslu á að nemendur kynni verkefni sín bæði með myndrænni framsetningu og frásögnum og fái tækifæri til að gefa sköpunarþörfinni lausan tauminn, jafnvel með leikrænni tjáningu eða tónlistarflutningi.

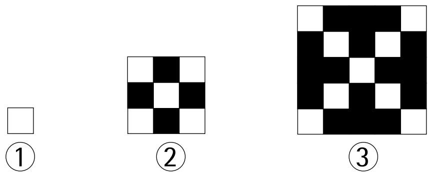
Verkefnin eru öll þess eðlis að allir nemendur ættu að geta fengist við þau. Mörg þeirra byrja á einfaldri rannsókn og síðan bætast við fleiri liðir þar sem gerð er meiri krafa um óhlutbunda hugsun. Í slíkum tilvikum geta nemendur leyst þá liði sem þeir ráða við en sleppt öðrum. Í samstarfi við aðra koma þeir líka oft auga á lausnir sem þeir sáu ekki sjálfir og í samræðu verða oft til nýjar hugmyndir. Mikilvægt er að nemendur hafi tiltæk hjálpargögn sem geta auðveldað þeim lausn á verkefnunum hvort sem eru hlutir, líkön eða reiknitæki svo sem vasareiknir eða töflureiknir.

Námsmat

Mat á lausnum nemenda er órjúfanlegur þáttur í kennslunni. Í umfjöllun um námsmat á vef Námsgagnastofnunar: *Stærðfræði fyrir unglingastig*, er fjallað um nokkrar leiðir við námsmat og þau meginsjónarmið sem hafa ber að leiðarljósi samkvæmt stærðfræðihluta aðalnámskrár grunnskóla. Þar er minnt á að kanna þurfi hvað nemandinn getur fremur en að leita eftir hvað hann getur ekki. Einnig er lögð áhersla á að námsmat sé fjölbreytt og þekking nemenda könnuð í eðlilegu samhengi og í samræmi við kennslutilhögun. Nemendum þarf að vera ljóst hvaða forsendur eru lagðar til grunvallar við námsmat og þeir eiga að fá að njóta sín sem best. Með því að fylgjast með nemendum leysa þau verkefni sem er að finna í þemaheftinu getur kennari kannað þekkingu þeirra og skilning. Hann getur til dæmis rætt við þá um lausnaleiðir þeirra og skráð hjá sér atriði sem fram koma í samtalinu. Þar koma minnispunktar um viðtöl sem leið við námsmat að góðum notum. Einnig eru leiðbeiningar sem gagnast vel við mat á hópverkefnum og verklegri vinnu. Þá er mikilvægt að nemendur læri að meta eigin frammistöðu og skilning á verkefnum. Þegar nemendur kynna verkefnin fyrir bekkjarfélögum sínum er líka mikilvægt að leggja áherslu á jafningjamat ekki síður en mat kennara á kynningum þeirra. Loks getur leiðarbók nemenda þar sem þeir skrá vinnu- og lausnaferli sitt gefið kennara góðar upplýsingar, auk þess sem slík skráning hvetur nemendur til ígrundunar um eigið nám.

Viðbótarverkefni

Vigfús ætlar að flísaleggja baðherbergið sitt og hefur ákveðið að hafa nokkra ferninga úr hvítum og svörtum flísum. Hann hefur ekki ákveðið hve stóra hann vill hafa þá og gerir nokkrar skissur af mynstri. Hér sjáið þið eina af tillögum hans:



- Haldið áfram að stækka ferningana og finnið út hve margar hvítar flísar og hve margar svartar flísar hann þarf í ferning númer 4.
- Hve margar flísar af hvorri tegund þarf hann í ferning númer 7?
  En númer 10?
- Finnið reglu sem gerir ykkur kleift að finna út hve margar hvítar flísar og hve margar svartar flísar þarf í mynd númer n.
- Gerið tillögu að eigin mynstri. Rannsakið hvernig það vex og finnið reglu sem gildir um fjölda flísa í ferningi af hvaða stærð sem er.
- Skoðið mynstur bekkjarfélaga ykkar og og ræðið við þá fyrir hvaða mynstur er flókið að finna reglu og í hvaða mynstrum það er einfalt.
- Hvað einkennir þau mynstur sem er einfalt að finna reglu fyrir?
  En þau sem eru flókin?
- Voru allir sammála um hvaða mynstur eru flókin og hvaða mynstur eru einföld.
- Getur verið að fólk horfi á ólíka þætti í mynstrunum og greini þau þannig út frá ólíkum forsendum?

Lausn á viðbótarverkefni

	hvítir		svartir		samtals	
1		1		0		1
2	$4 \cdot 2 - 3$	5	2^2	4	3^2	9
3	$4 \cdot 3 - 3$	9	4^2	16	5^2	25
4		13	6^2	36	7^2	49
5		17	8^2	64	9^2	81
7		25	12^2	144	13^2	169
10		37	18^2	324	19^2	361
n	$4n - 3$		$(2n - 2)^2$		$(2n - 1)^2$	

Prófun: $4n - 3 + (2n - 2)(2n - 2) = 4n^2 - 4n - 4n + 4 + 4n - 3 = 4n^2 - 4n + 1 = (2n - 1)^2$

Umfjöllun um lausnir í þemaheftinu

Hér á eftir er umfjöllun um lausnir á verkefnum í þemaheftinu.

Dularfulla rósin (Bls. 1)

Hér er gott að setja athuganir sínar upp í töflu. Töflureiknir hentar vel við þessa rannsókn.

Fjöldi punkta (p)	2	3	4	5	6	...	18
Fjöldi lína (l)	1	3	6	10	15	...	153

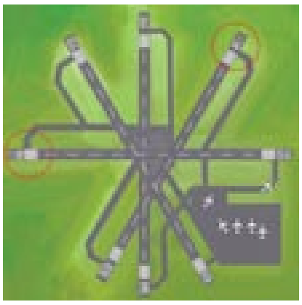
Fjöldi lína er $\frac{1}{2}\,p\,(p - 1) = \frac{p\,(p - 1)}{2}$

Fjöldi lína eru þríhyrningstölur.

Tölur (Bls. 2)

Í þessu verkefni er verið að kanna rununa sem kemur út þegar reglunni er framfylgt. Einna helst er vert að skoða hvort runan 4, 2, 1 komi fyrir í lokin en þá er ekki hægt að halda lengra áfram. Byrjunartölurnar 6, 7 og 9 eru kannaðar til að komast að því hvort við fáum þekktu endarununa út.

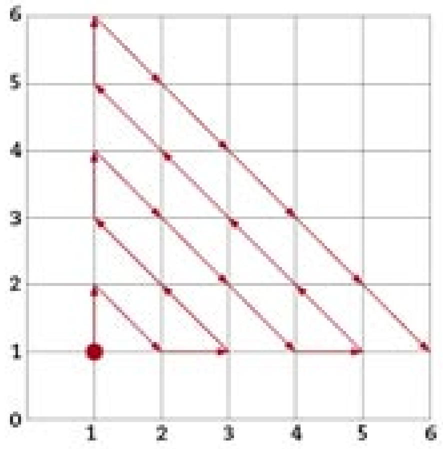
Allar tölur lenda alltaf á 4, 2, 1 og þá endurtekur sú lota sig.



Flugbrautarnúmer (Bls. 2)

Einfalt verkefni sem nemendur geta auðveldlega leyst ef vísbendingin er fundin. Ef núll er sett fyrir aftan númerin á flugbrautunum sést að munurinn á milli enda brautanna er alltaf 180°.

Ferðalag örvanna (Bls. 3)



Í 1. prentun bókar vantar eina ör í myndina. Svona er myndin rétt.

Verkefni sem krefst þess að skoða hnitin og rannsaka uppgefna leið í hnitakerfinu. Hægt er að teikna upp stórt hnitakerfi og rannsaka örvarnar en hnitin sjálf gefa mestu upplýsingarnar.

- Örvarnar fara vissulega í gegnum punktinn (18,17) eins og alla punkta þar sem x og y gildin eru jákvæðar tölur. Að undanskildum hnitunum: (0,1), (0,2) ... og (1,0), (2,0) ...
- Í punktinum (18,17) mun leið örvanna fara hornrétt niður og til hægri en það gerist alltaf þegar summa x og y gildana er oddatala. Þannig að næsti punktur á eftir (18,17) er (19,16).

Einnig má sjá að þegar leiðin liggur uppá við eru gildi hnitanna annaðhvort bæði oddatölur eða sléttar tölur. Þegar hnitin eru (slétt, odda) eða (odda, slétt) þá liggur leið örvanna hornrétt niður.

- Örvarnar fara í gegnum 74 punkta áður en þær ná hnitinu (9,4). Ef punktarnir eru skoðaðir í hornalínu má sjá að 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 66 punktar eru í hornalínunum áður en lagt er af stað í hornalínuna þar sem (9,4) liggur. Hornalínan liggur niður og til hægri á punktinn (9,4). Punktarnir sem má þá bæta við 66 eru þeir sem hafa summuna 13 á x og y gildunum. (9 + 4) = 13. En það eru (12,1), (11,2), (10,3), (9,4), (8,5), (7,6), (6,7) og (5,8), sem gera 8 punkta. Þannig að 66 + 8 = 74 punktar sem eru heimsóttir áður en komið er að (9,4).

Íslandsferðin (Bls. 4–5)

Við mat á lausnum nemenda á þessu verkefni þarf að skoða hve skipulega þeir hafa unnið og hve vel þeir rökstyðja þær forsendur sem þeir gefa sér. Þá þarf að skoða samstarfið og hvað hver og einn lagði af mörkum til þess. Við kynningu á verkefninu þarf að taka tillit til þess hve skýrt nemendur koma niðurstöðum sínum til skila og hvernig þeir lýsa lausnaferli sínu. Hér er upplagt að gefa nemendum tækifæri til að meta eigin frammistöðu og hópsins síns og einnig að hafa jafningjamat á kynningu nemenda.

Biðraðir (Bls. 6)

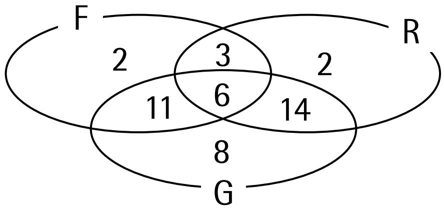
Verkefnið krefst þess að nemendur gefi sér ákveðnar forsendur og vinni með þær. Lausnir geta verið mismunandi og hér eru gefin nokkur sýnishorn af mögulegum svörum:

- Ef hver og einn er 30 sek. að kaupa miða þá eru 299 manns um $30 \cdot 299 = 8970$ sek. eða um 150 mín. ($2\frac{1}{2}$ klst.) í biðröð.

- Önnur leið er ef það tekur 30 sek. að kaupa miða fyrir einn þá tekur það 1 mín. fyrir tvo og $\frac{300}{2}$ er um 150 sem gerir $2\frac{1}{2}$ klst.
- Vegalengd raðarinnar er háð því hvað hver og einn tekur mikið pláss í röðinni. Ef hver og einn tekur 50 cm þá gæti röðin verið um 150 m á lengd.

- Ef þessi fjöldi af fólki væri að kaupa miða í bíó, þá er spurning hve margir sölubásar eru í boði.
- Sama gildir um 3000 · 30 sek. = 90 000 sek. Það þarf 12–13 sölubása til að sinna þessum fjölda. Ef 300 manns eru afgreiddir á $2\frac{1}{2}$ klst. þá eru 3000 afgreiddir á 25 tímum og ef hver sölubás er opinn í tvær klst. þarf 12–13 bása til að anna eftirspurn.

Enski boltinn (Bls. 6)



Hægt er að leysa verkefnið með því að teikna upp mengjamynd með þremur mengjum.

- 92 tóku þátt í könnuninni.
- 2 nefndu Fabregas eingöngu, 2 Ronaldo og 8 nefndu Gerrard.
- 28 nefndu tvo sem sína uppáhaldsleikmenn.

Raðað í ferninginn (Bls. 7)

Verkefnið reynir á talnaskilning og skilgreiningu á tölum. Gott er að byrja á að skrifa upp allar tölurnar sem tilheyra hverri vísbendingu. Auðveldast er að byrja á miðgildi talnanna, sem er 13, og síðan þarf að athuga hvaða reitir eru nefndir oft í vísbendingunum og finna út hvaða tölur það gætu verið. Í lokin verður að nota útilokunaraðferð til þess að klára töfluna en þá verða komnar fjórar tölur í einhverjar raðir, þá þarf að draga tölurnar frá 65 til þess að finna auða reitinn.

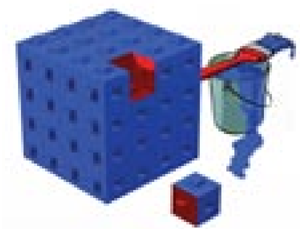
Endanleg lausn er eftirfarandi:

	a	b	c	d	e
5	11	4	17	10	23
4	24	12	5	18	6
3	7	25	13	1	19
2	20	8	21	14	2
1	3	16	9	22	15

Jóla, jóla … , Jólatré og Jólagjafir (Bls. 8)

Stórt verkefni sem byggist á því að nemendur gefi sér ákveðnar forsendur í upphafi og rökstyðji þær. Verkefnið reynir á útsjónarsemi nemenda við að útfæra lausnina. Nemendur geta unnið saman að lausn í fámennum hópum. Verkefnið mætti nota sem matsverkefni. Margar mismunandi lausnir eru mögulegar.

Máluðu teningarnir (Bls. 9)



Gott er að vinna skipulega að lausn verkefnisins og skrá allar rannsóknir í töflu. Ef nemendur búa til einn tening úr sentíkubbum, t.d. með hliðarlengd 3, er auðvelt að sjá hina teningana fyrir sér.

hliðar litaðar / hliðar-lengd	1 blá	2 bláar	3 bláar	Allar rauðar
3 kubbar	6 kubbar (6 · 1 · 1)	12 kubbar (12 · 1)	8 kubbar	1 kubbur (1 · 1 · 1)
4 kubbar	24 kubbar (6 · 2 · 2)	24 kubbar (12 · 2)	8 kubbar	8 kubbar (2 · 2 · 2)
5 kubbar	54 kubbar (6 · 3 · 3)	36 kubbar (12 · 3)	8 kubbar	27 kubbar (3 · 3 · 3)
10 kubbar	384 kubbar (6 · 8 · 8)	96 kubbar (12 · 8)	8 kubbar	512 kubbar (8 · 8 · 8)
n kubbar	$6(n - 2)^2$	$12(n - 2)$	8 kubbar	$(n - 2)^3$

Teningur Írisar

- 5 · 5 · 5 = 125
- Átta kubbar
- 36 kubbar
- 54 kubbar
- 27 kubbar

Ef taflan sem fylgir lausn með þraut um máluðu teningana er skoðuð, þá kemur í ljós að ef hliðarlengdin er 5 kubbar þá liggur svarið við þraut Írisar fyrir.

Yfirborðið (Bls. 10)

Teningar: Hér er gagnlegt að búa teningana til úr sentíkubbum og prófa að raða þeim saman. Þá er auðvelt að telja fletina sem sjást.

- Minnsta mögulega yfirborðsflatarmál:

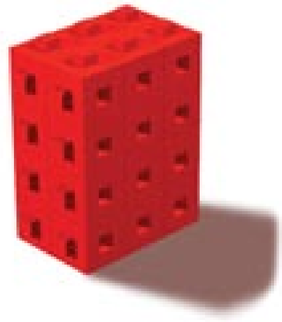
Ef tveir minni teningarnir eru lagðir hlið við hlið ofan á þann stærsta verður yfirborðsflatarmálið $6 \cdot 8 \cdot 8 - 6 \cdot 6 - 2 \cdot 2 + 5 \cdot 6 \cdot 6 - 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \cdot 2 = 536\ m^2$

- Réttstrendingur 500 kubbar.

Í þessu verkefni er gagnlegt að nota töflureikni. Ef rúmmálið er gefið 500 og mismunandi stærðir settar inn fyrir lengd og breidd fæst hæðin (=D2/A2/B2)

Yfirborðsflatarmálið er svo fundið (= 2*A2*B2 + 2*B2*C2 + 2*A2*C2).

	A	B	C	D	E
1	lengd	breidd	hæð	rúmmál	yfirborðs-flatarmál
2	1	1	500	500	2002
3	1	2	250	500	1504
4	1	4	125	500	1258
5	1	5	100	500	1210
6	1	10	50	500	1120
7	1	25	20	500	1090
8	2	2	125	500	1008
9	2	5	50	500	720
10	2	10	25	500	640
11	5	5	20	500	450
12	5	10	10	500	400



Rúmmál tennisbolta (Bls.10)

- Boltarnir taka $\frac{2}{3}$ hluta af rúmmáli dósarinnar.
- Rúmmál dósarinnar er: $r^2 \cdot h \cdot \pi \approx 647$ cm^3
- Rúmmál tennisbolta: $\frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} \approx 144$ cm^3

  eða: $\frac{2}{3}$ (af rúmmáli dósarinnar) $\cdot$ $\frac{1}{3}$ (hver bolti) ≈ 144

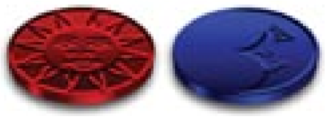
Flott tilboð (Bls. 11)

Annað stórt verkefni sem mögulega er hægt að setja upp í Excel til þess að sýna nákvæma útreikninga. Forsendur og rökstuðningur fyrir ýmsum ákvörðunum eru nauðsynleg til þess að vinna verkefnið. Tekjurnar af sölu hjólanna er nokkuð auðvelt að vinna með en kostnaðarþættirnir geta verið margir og flóknir. Þess vegna er mikilvægt að kennarar finni út með nemendum hvaða kostnaðarliði er nauðsynlegt að vinna með því hægt er að flækjast með fjölmörg atriði sem geta reynst of flókin og tímafrek.

Þáttunar- og margföldunarleikur (Bls. 12)

Í þessum leik er engin lausn en gott væri að eiga útprentað blað með nokkrum hundraðtalnatöflum til þess að nemendur geti spilað allt að fjóra leiki í einu og náð þannig færni í því að vinna með þætti talna. Sýnishorn af slíku vinnublaði er í lok heftisins.

Flokkun (Bls. 13)



RBRBRBRB

Fjöldi af hvorum lit	1	2	3	4	5	6	n
Fjöldi flutninga	0	1	3	6	10	15	$\frac{n(n-1)}{2}$

RRBBRRBBRRBB

Fjöldi af hvorum lit	2	4	6	8	10	12	n
Fjöldi flutninga	0	4	12	24	40	60	$\frac{n(n-2)}{2}$

RBBRRBBRRBB....RRBBR

Fjöldi af hvorum lit	2	4	6	8	10	12	n
Fjöldi flutninga	2	8	18	32	50	60	$\frac{n^2}{2}$

Þrír litir: RBGRBGR.....RBGR

Fjöldi af hverjum lit	1	2	3	4	5	6	n
Fjöldi flutninga	0	3	9	18	30	45	$\frac{3n(n-1)}{2}$

Fjórir litir: RBGFRBGFRBGF.....RBGF

Fjöldi af hverjum lit	1	2	3	4	5	6	n
Fjöldi flutninga	0	6	18	36	60	90	3n(n-1)

Ef fjöldi lita er m þá er fjöldi flutninga: $\frac{m(m-1)}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}$

Talnaferningur (Bls. 14)

Í þessum leik þarf að útbúa reit sem er 5 ·5 á stærð. Leikurinn gengur út á að leiða mótspilarann í sjálfheldu þannig að hann geti ekki sett niður næstu tölu.

Strikað yfir síðasta punktinn (Bls. 14)

Einfaldur leikur fyrir tvo. Teiknaðir eru 4 · 4 punktar á blað og síðan má strika yfir eins marga punkta og hægt er lóðrétt. Ekki má t.d. strika yfir þrjá í röð ef miðjupunkturinn er þegar yfirstrikaður.

Til þess að eiga möguleika á að sigra verður að reyna að skilja eftir 2 · 2 punkta í röð. Til þess að útfæra það nánar er gott að skilja eftir 2 · 4 punkta í röð eða 4 · 2 punkta. Þegar nemendur eru orðnir góðir í leiknum, þá sjá þeir að sá sem byrjar ætti að tapa ef réttar aðgerðir taka við í framhaldinu.

Flísalögn – samvinnuverkefni (Bls. 15)

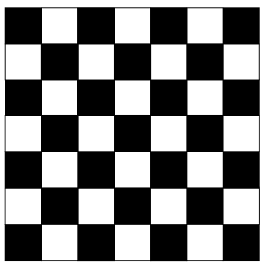
Gott er að gera sér töflu og færa inn fjölda reita. Þegar skráður hefur verið fjöldi reita fyrir nokkra liði er auðvelt að sjá hver fjölgunin verður og finna regluna.

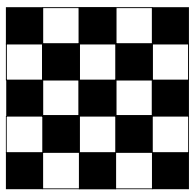
	hvítir		svartir		samtals	
1		0		1		1
2		1	(1 + 2)	3	2^2	4
3	(1 + 2)	3	(1 + 2 + 3)	6	3^2	9
4	(1 + 2 + 3)	6	(1 + 2 + 3 + 4)	10	4^2	16
5	(1 + 2 + 3 + 4)	10	(1 + 2 + 3 + 4 + 5)	15	5^2	25
7	(1 + 2 + 3 + ... + 6)	21	(1 + 2 + 3 + ... + 7)	28	7^2	49
10	(1 + 2 + 3 + ... + 9)	45	(1 + 2 + 3 + ... + 10)	55	10^2	100
n	$\frac{n(n-1)}{2}$		$\frac{n(n+1)}{2}$		n^2	

Prófun: $\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n^2 - n + n^2 + n)}{2} = \frac{2\,n^2}{2} = n^2$

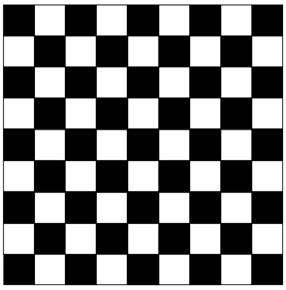
Að þekja með dómínókubbi (Bls. 16)

Það er ekki hægt að þekja flötinn með dómínokubbnum. Þegar nemendur hafa áttað sig á að fjöldi reita er 48 álykta flestir að það sé hægt en komast svo að því að það gengur ekki. Ef hins vegar einhvern af lituðu reitunum vantar í ferninginn þá er hægt að þekja hann.





Á sama hátt er hægt að þekja ferning sem gerður er úr 5 · 5 reitum ef einhvern af lituðu reitunum vantar. Þá má miðjuhliðarreitinn vanta, en það gengur ekki í 7 · 7 reitnum.



Það er hægt að þekja ferning með hliðarlengd þar sem reitirnir eru oddatala ef hornreitinn og annan hvorn reit vantar eins og á myndunum hér að ofan. Það er að sjálfsögðu ekki hægt að þekja flöt sem hefur hliðarlengd þar sem fjöldi reita er slétt tala og einn ferning vantar, því þá verður fjöldi reita oddatala.

Það er gagnlegt fyrir nemendur að reyna sig við að orða reglu um hvaða reiti má vanta í netið.

Dómínóferningur (Bls. 16)

Leikmaður sem ekki byrjar getur alltaf unnið ef hann gætir þess að leggja dómínókubbinn þannig að að dómínómynstrið sé ávallt speglun um miðpunkt spilaborðins.

Ef sá sem fyrst leggur kubb setur hann í stöðu A á myndinni leggur seinni leikmaður sinn kubb í stöðu B. Samvarandi leggur hann í stöðu D ef fyrri leikmaður leggur sinn kubb í stöðu C.

Þáttunar og margföldunarleikur – Vinnublað

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100