Vinkill 3

Lausnir

27. ágúst 2008

Ítarefni í stærðfræði fyrir 10. bekk

Um efnið

Þetta efni er ætlað sem ítarefni í stærðfræði fyrir unglingastig. Efnið getur hentað til einstaklings- eða paravinnu í skólanum en einnig má nýta það sem heimavinnuverkefni. Sum verkefnin geta nemendur leyst á blöðunum en önnur þarf að skrá í vinnubók.

Efnisyfirlit

Vinkill 3

Ritstjóri: Hafdís Finnbogadóttir

1. útgáfa 2008
Námsgagnastofnun

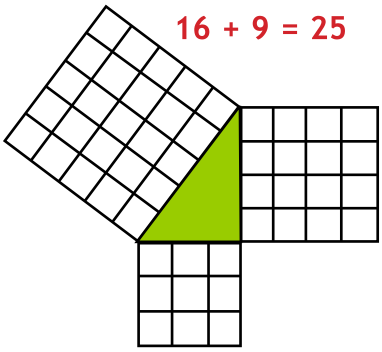
Umbrot og útlit: Námsgagnastofnun

Regla Pýþagórasar

1. Samkvæmt reglu Pýþagórasar, $a^2 + b^2 = c^2$, á summa ferningstalna skammhliða á rétthyrndum þríhyrningi að vera jöfn ferningstölu langhliðarinnar. Kannaðu þetta með því að skoða ferningstölur skammhliðanna á eftirfarandi rétthyrndum þríhyrningum og athugaðu hvort summa þeirra sé jöfn ferningstölu langhliðarinnar.

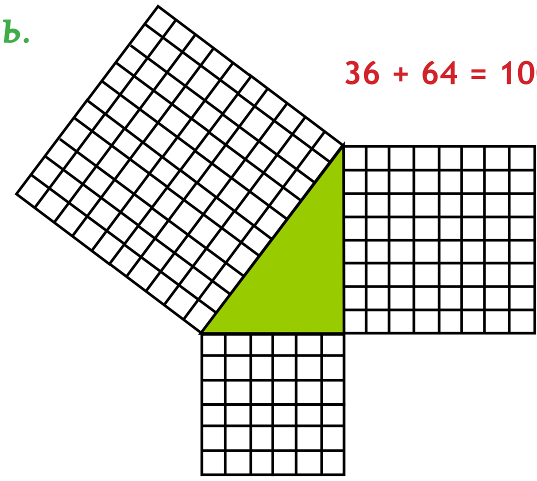
a.

16 + 9 = 25



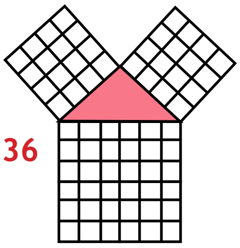
b.

36 + 64 = 100



2. Skoðaðu til samanburðar tvo þríhyrninga sem eru ekki rétthyrndir og kannaðu hvort sama regla gildi um þá.

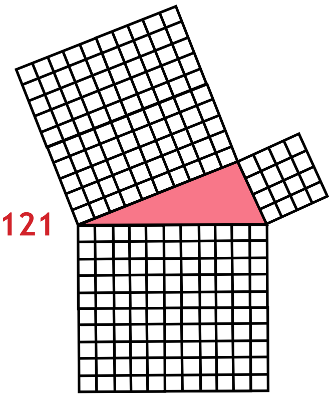
a.



16 + 16 ≠ 36

b.

16 + 100 ≠ 121

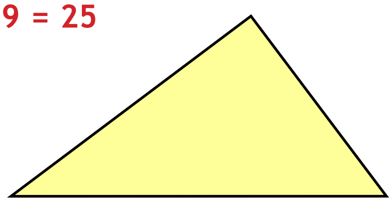


Reglan gildir því ekki fyrir þríhyrninga sem eru ekki rétthyrndir.

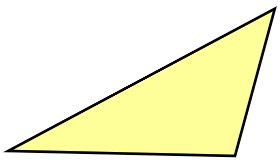
Hvað kemur í ljós? Gildir regla Pýþagórasar líka um þessa þríhyrninga?

3. Notaðu niðurstöður þínar úr dæmunum hér að ofan til þess að kanna hvort þríhyrningarnir hér fyrir neðan eru rétthyrndir eða ekki. Mældu þá, teiknaðu ferninga út frá hverri hlið og reiknaðu flatarmál ferninganna.

16 + 9 = 25



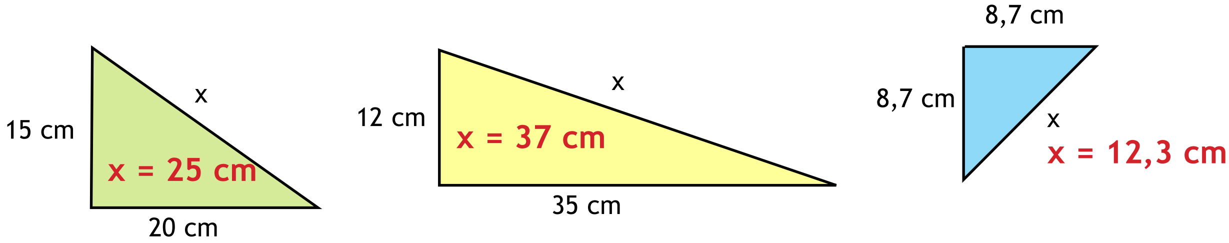
4 + 9 ≠ 16



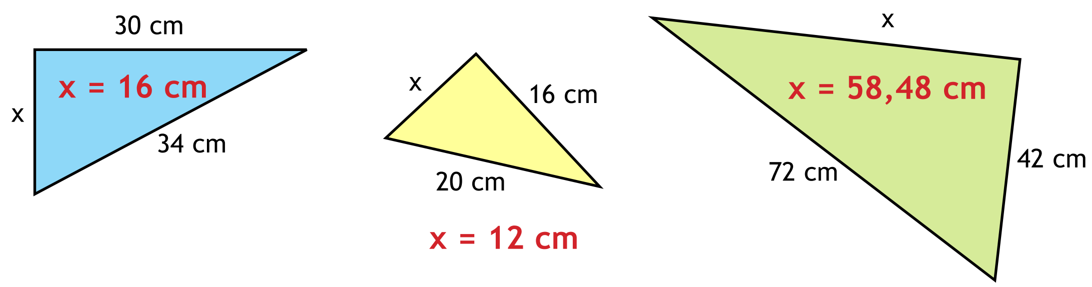
Fyrri þríhyrningurinn 16 + 9 = 25, er rétthyrndur.
Seinni þríhyrningurinn 4 + 9 ≠ 16, er ekki rétthyrndur.

Rétthyrndir þríhyrningar

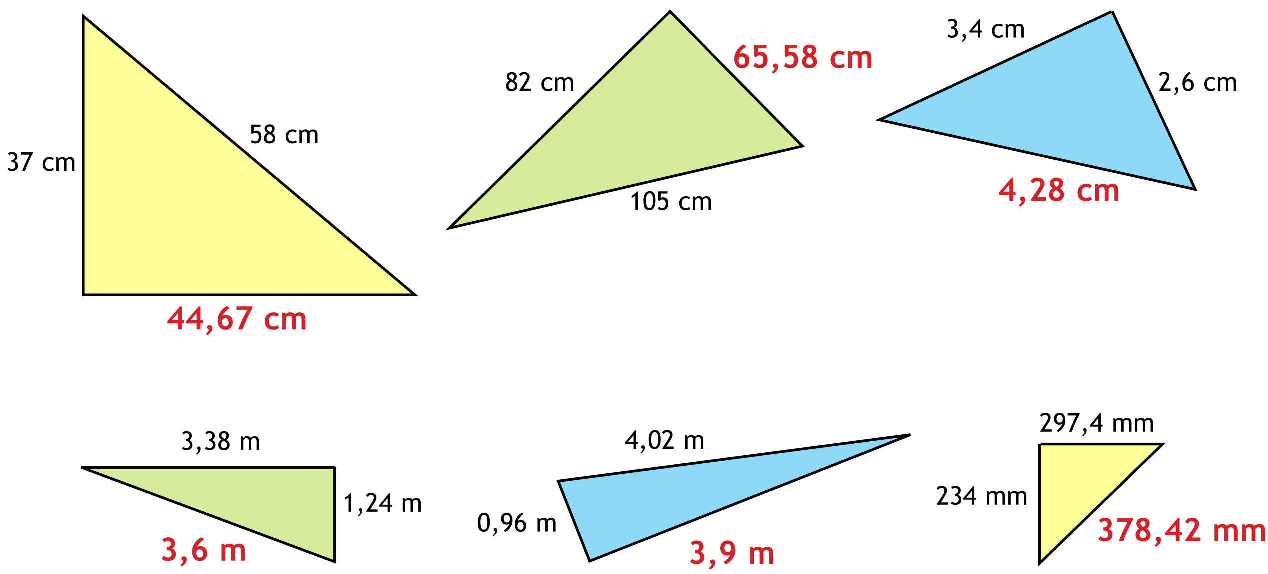
1. Notaðu reglu Pýþagórasar til þess að finna lengd langhliðarinnar á þessum rétthyrndu þríhyrningum.



2. Kannaðu hvort þú getir notað reglu Pýþagórasar til að finna lengd skammhliðar í rétthyrndum þríhyrningum.



3. Finndu lengd óþekktu hliðanna.

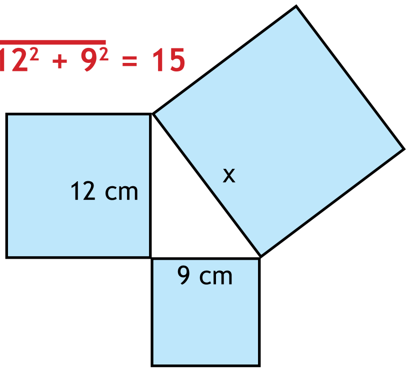


Flatarmyndir

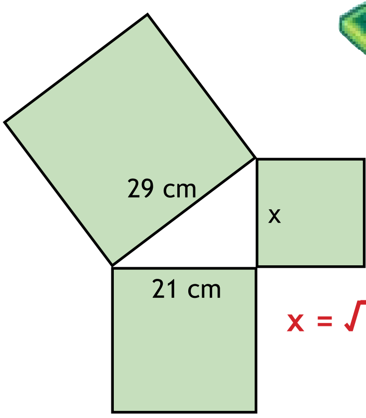
1. Finndu flatarmál ferninganna þriggja á myndunum og lengd striksins x.

a.

$x = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$



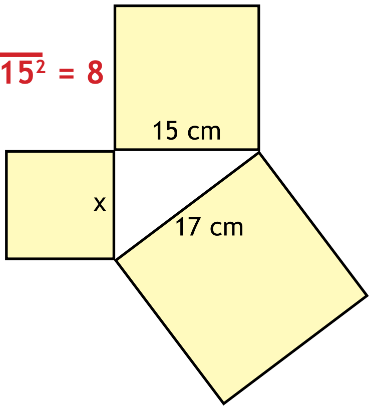
c.



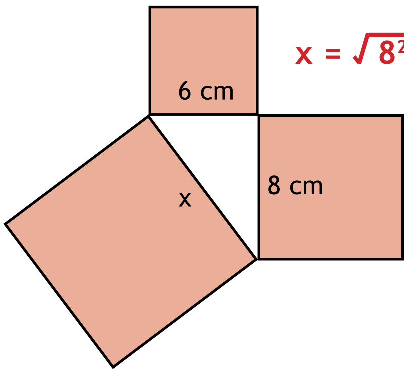
$x = \sqrt{29^2 + 21^2} = 20$

b.

$x = \sqrt{17^2 + 15^2} = 8$



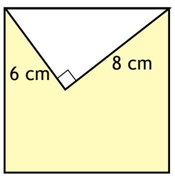
d.



$x = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$

2. Finndu flatarmál skyggðu svæðanna á myndunum. Athugaðu að allir ferhyrningar á myndunum eru ferningar.

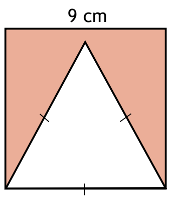
a. Fyrst þarf að finna hlið í ferningnum með reglu Pýþagórasar.



$x = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$

Flatarmálið litaða svæðisins $= 10^2 - \frac{6 \cdot 8}{2} = 76$ flatareiningar.

c. Fyrst þarf að finna hæð þríhyningsins með reglu Pýþagórasar.



$x = \sqrt{9^2 - 4{,}5^2} = 7{,}794$

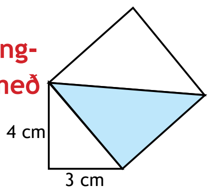
Flatarmál þríhyrnings =

$\frac{9 \cdot 1{,}194}{2} = 35{,}074$ flatareiningar.

Flatarmál litaða svæðisins =

$9^2 - 43{,}074 = 45{,}926$ flatareiningar.

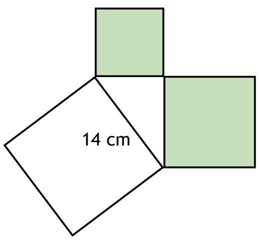
b. Fyrst þarf að finna langhlið þríhyninginsins með reglu Pýþagórasar.



$x = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

Flatarmál fernings er $5^2 = 25$ og flatarmál litaða svæðisins er $\frac{25}{2} =$ 12,5 flatareiningar.

d. Flatarmál litaða svæðisins má skrá sem $a^2 + b^2$ sem er það sama og $c^2 = 14^2 = 196$



Í daglegu lífi 1

1. Teiknaðu þríhyrningana og kannaðu hvort þeir séu rétthyrndir þegar hliðar þeirra eru:

a. 14 cm, 48 cm og 50 cm $\sqrt{14^2 + 48^2} = 50$

b. 5 cm, 6 cm og 8 cm $\sqrt{5^2 + 6^2} \neq 8$

c. 5 cm, 12 cm og 13 cm $\sqrt{5^2 + 2^2} = 13$

d. 9 cm, 12 cm og 15 cm $\sqrt{9^2 + 12^2} = 15$

e. 5 cm, 8 cm og 9 cm $\sqrt{5^2 + 8^2} \neq 9$

2. Einar stendur uppi í stiga og tínir epli af tré í garði sínum. Stiginn er 3,6 m að hæð og er staðsettur 1,8 m frá trénu. Hve hátt er tréð ef stiginn nær upp í $\frac{2}{3}$ af hæð þess?

Fyrst þarf að finna hæð stigans.

$h_{stiga} = \sqrt{3{,}6^2 - 1{,}8^2} = 3{,}12 \quad h_{trés} = 4{,}68$ m.

3. Einar og Bára kveðjast við krossgötur. Bára heldur í norður en Einar í vestur. Eftir 10 mínútur hefur Bára gengið 850 m en Einar 950 m. Hver er fjarlægðin milli þeirra?

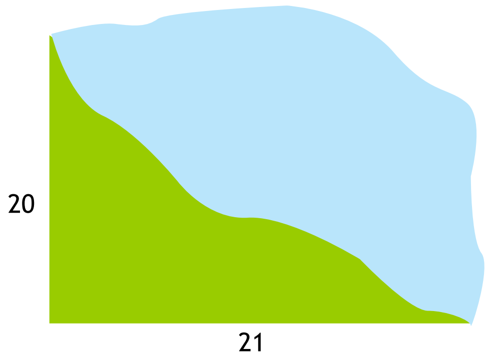
$\sqrt{950^2 + 850^2} = 1274{,}75$ m

4. Bára ætlar að mála gaflinn á húsinu sínu. Þakskegg hússins er 5,2 m hátt. Hvað þarf hún langan stiga til að ná upp í hæð sem er 0,5 m undir þakskegginu ef hún gerir ráð fyrir að neðri endi stigans sé 2,1 m frá veggnum?

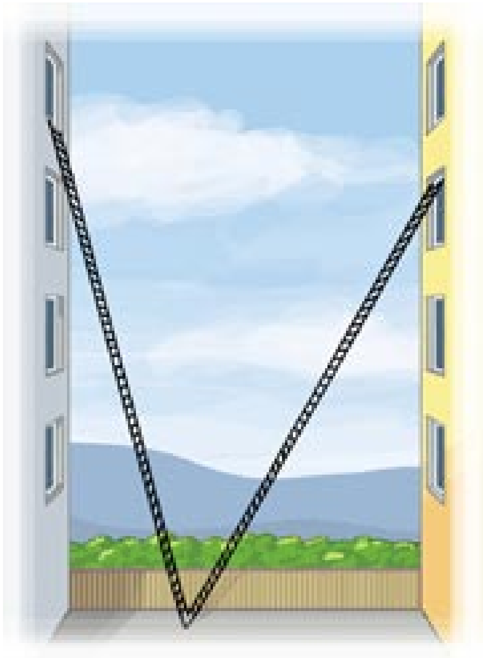
Þarf að ná hæð sem er 5,2 – 0,5 = 4,7 m. $\sqrt{4{,}7^2 + 2{,}1^2} = 5{,}15$ m.

5. Einar mælir stærð tjarnar sem er á sumarbústaðarlóð hans. Hann mælir fjarlægðir frá sumarbústaðnum að hvorum enda tjarnarinnar. Hve löng er tjörnin?

Lengd $= \sqrt{20^2 + 21^2} = 29$ m.



Í daglegu lífi 2



1. Stiga er stillt upp þannig að hann rétt nær upp í glugga sem er í 10 m hæð frá jörðu. Stiginn stendur 2,5 m frá húsveggnum. Ef stiganum er velt yfir að húsi sem stendur á móti nær hann upp í glugga sem er 9 m frá jörðu. Hve breið er gatan milli húsanna?

Fyrst þarf að finna hæð stigans sem er $\sqrt{10^2 + 2{,}5^2} = 10{,}31$ m.

Fjarlægð stiga frá húsi á móti er

$\sqrt{10{,}31^2 - 9^2} = 5{,}03$ m.

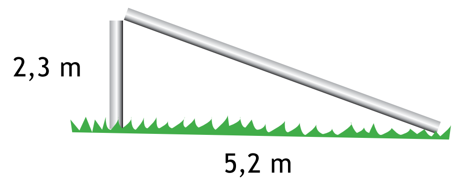
Fjarlægð milli húsa er 5,03 + 2,5 = 7,53 m.

2. Frikki er að fljúga nýja flugdrekanum sínum. Flugdrekinn er kominn í u.þ.b. 18 m fjarlægð frá honum upp í loftið og er u.þ.b. 2,5 m til hliðar við hann. Hvað má áætla að hann sé kominn marga metra upp í loft? Ef miðað er við að Frikki sé 165 cm á hæð, hve hátt er flugdrekinn þá frá jörðu?

Fjarlægð frá Frikka er $=\sqrt{18^2 - 2{,}5^2} = 17{,}23$ m.

Hæð frá jörðu er 17,83 + 1,65 = 19,48 m.

3. Fánastöngin hennar Fjólu brotnaði í óveðri. Hún þurfti því að kaupa sér nýja en mundi ekki hvað gamla stöngin hafði verið há. Hjálpaðu henni að finna út hve löng hún var. Svaraðu með heilli tölu.

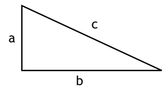


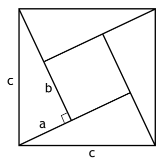
Stöngin var 8 m löng.

Sannanir á reglu Pýþagórasar

Margar sannanir eru til á reglu Pýþagórasar. Hér færð þú tækifæri til að spreyta þig á tveimur sönnunum á reglunni.

1. Á 11. öld kom indverski stærðfræðingurinn Bhaskara með sönnun sem byggist á fjórum eins rétthyrndum þríhyrningum og einum ferningi. Þríhyrningunum fjórum og ferningnum er hægt að raða saman í einn stærri ferning.



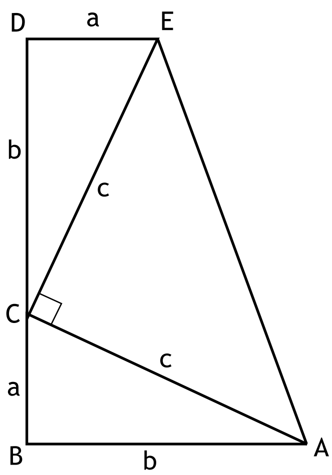


a. Skráðu hliðarlengd stóra ferningsins.
b. Skráðu hliðarlengd minni ferningsins.
c. Finndu flatarmál minni ferningsins.
d. Finndu flatarmáll eins þríhyrnings.
e. Finndu heildarflatarmáll allra þríhyrninganna.
f. Settu fram jöfnu sem sýnir sambandið á milli flatarmáls þríhyrninganna fjögurra og minni ferningsins annars vegar og flatarmál stóra ferningsins hins vegar.
g. Einfaldaðu jöfnuna og athugaðu hvað kemur í ljós.
h. Skráðu niðurstöður þínar.

a. C
b. $b - a$
c. $(b - a)^2 = b^2 - 2ab + b^2$
d. $\frac{a \cdot b}{2}$
e. $\frac{4(a \cdot b)}{2} = 2ab$
f. $2ab + a^2 - 2ab + b^2 = c^2$
g. $a^2 + b^2$

2. Þessi sönnun á reglu Pýþagórasar er sundum kennd við herforingjann James Garfield sem var, í stuttan tíma (áður en hann varð fyrir voðaskoti), forseti Bandaríkjanna (1881). Sönnunin byggist á tveimur eins rétthyrndum þríhyrningum og öðrum rétthyrndum þríhyrningi sem saman mynda trapisuna ABDE.

a. Finndu flatarmál þríhyrninganna þriggja.
b. Finndu flatarmál trapisunnar ABDE.
c. Settu fram jöfnu sem sýnir sambandið á milli flatarmáls þríhyrninganna þriggja annarsvegar og flatarmál trapisunnar ABDE.
d. Einfaldaðu jöfnuna og athugaðu hvað kemur í ljós.
e. Skráðu niðurstöður þínar.



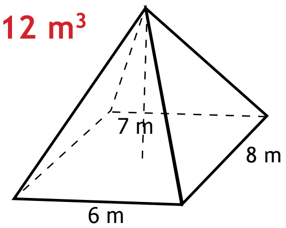
Pýramídar – rúmmál

Rúmmál pýramída

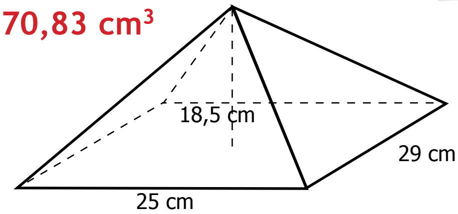
$$R = \frac{a \cdot b \cdot h}{3}$$

1. Notaðu formúlu fyrir rúmmáli pýramída til þess að reikna rúmmál þessara pýramída.

112 m³



4470,83 cm³

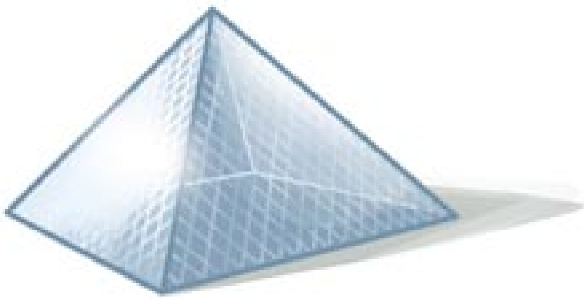


2. Hvert er rúmmál pýramída sem hefur grunnflöt 47 m^2 og er 12 m á hæð? **188 m^3**

3. Pýramídi er með þrjár hliðar og þríhyrningslaga botn. Hver hlið grunnflatarins er 13 m á lengd og hæð hans er 17 m. Finndu flatarmál botnsins?
Getur þú notað sömu formúlu til að reikna út rúmmál pýramída með fjórar hliðar? Kannaðu hvernig þú reiknar rúmmál þessa pýramída? Gott getur verið að teikna mynd til hjálpar. **F = 73,19 m^2** **R = 414,74 m^3**

4. Fyrir utan Louvre-safnið í París er stór glerpýramídi sem hefur ferningslaga botn og fjórar jafnstórar hliðar. Hliðarlengdir hans eru rúmmetra af lofti rúmar pýramídinn?
Ef pýramídinn væri fylltur með vatni hve marg

R = 8411,67 m^3 **8411666,67 lítra**

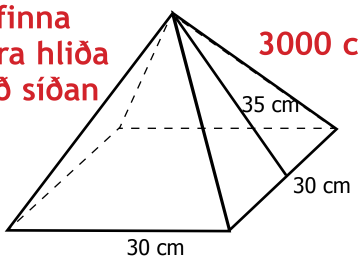


5. Ef pýramídinn við Louvre hefði haft hliðarlengdirnar 30 m en sama rúmmál, hver hefði hæð hans þá verið? **28,04 m hár**

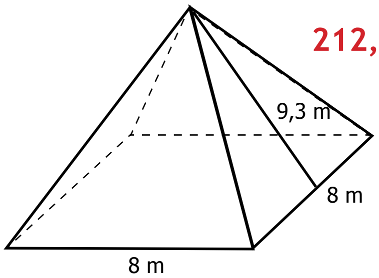
Pýramídar – yfirborðsflatarmál

1. Hvað þarft þú að vita og finna til þess að geta reiknað yfirborðsflatarmál pýramída? Prófaðu að finna yfirborðsflatarmálið á þessum pýramídum.

Það þarf að finna flatarmál allra hliða og leggja það síðan saman.



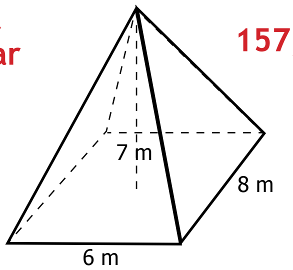
3000 cm²



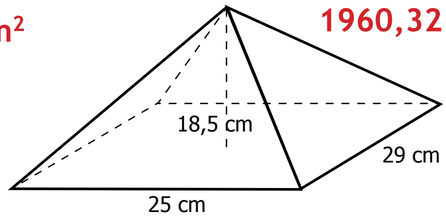
212,8 m²

2. Ef finna á yfirborðsflatarmál pýramída þar sem hæð hverrar hliðar er ekki gefin heldur aðeins hæð pýramídans sjálfs, hvaða leið getur þú notað? Skoðaðu myndirnar hér fyrir neðan og reiknaðu yfirborðsflatarmál pýramídanna.

Það þarf að nota reglu Pýþagórasar til að finna hæð hliðanna.



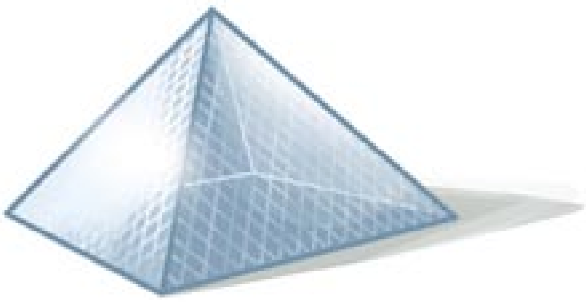
157,32 m²



1960,32 cm²

3. Fyrir utan Louvre-safnið í París er stór glerpýramídi sem hefur fjórar jafnstórar hliðar. Hliðarlengdir hans eru 35 m við botninn og hæð hans í miðjunni er 20,6 m. Hversu marga fermetra af gleri þarf til þess að þekja pýramídann? Þarf að gera ráð fyrir gleri í botninn?

Það þarf 1892,10 m² af gleri. Nei, það þarf ekki gler í botninn.



4. Hliðarnar í pýramídanum við Louvre eru settar saman úr tígullaga glerjum. Sumir halda því fram að glerin séu 666 talsins. Ef svo er, hve stór er þá hver glerplata í fersentímetrum? **Hver plata er 28410 cm².**

5. Pýramídi hefur þrjár hliðar og þríhyrningslaga botn. Allar hliðar hans eru jafnstórar. Grunnlína hvers þríhyrnings er 9 cm og hæð hans er 7,8 cm. Hvert er yfirborðsflatarmál pýramídans? **140,4 cm².**

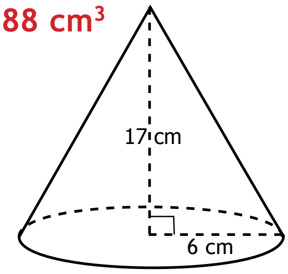
Keilur – rúmmál

Rúmmál keilu:

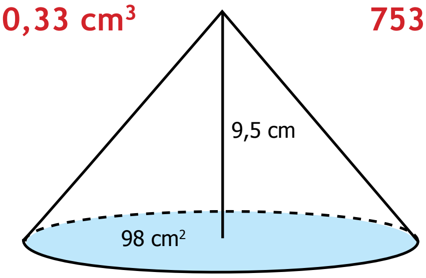
$$R = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3}$$

1. Finndu rúmmál keilnanna.

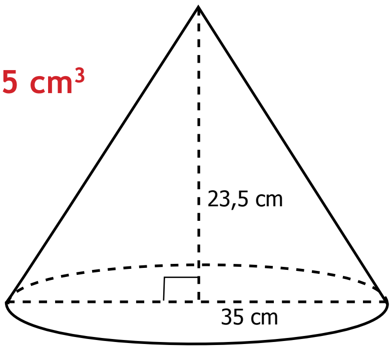
640,88 cm³



310,33 cm³

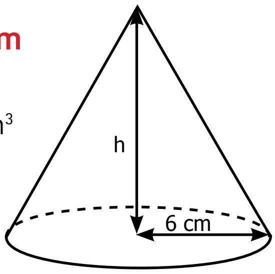


7536,55 cm³



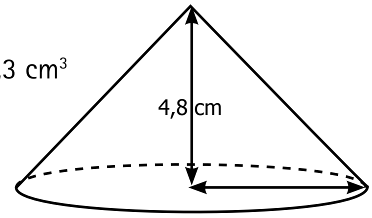
2. Hæð 15 cm

$R = 565{,}5\ cm^3$



Geisli 3,1 cm

$R = 48{,}3\ cm^3$



3. Rúmmál keilu er 236 cm³ og flatarmál grunnflatar hennar er 59 cm².

a. Hver er hæð keilunnar? 12 cm

b. Hver er radíus grunnflatarins? 4,33 cm

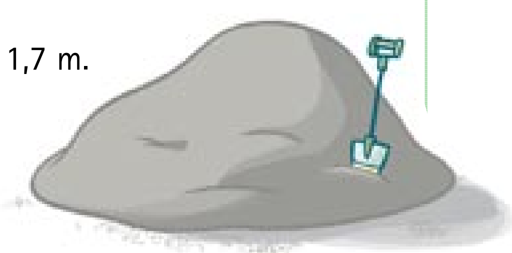
4. Keila hefur rúmmálið 584 cm³ og hæðina 9,5 cm. Hvert er þvermál grunnflatarins?

15,32 cm

5. Vörubíll sturtaði 2,5 m³ af sandi í hrúgu. Hæð hrúgunnar var 1,7 m.

a. Hvert er grunnflatarmál hrúgunnar? 4,41 m²

b. Hvert er þvermál hrúgunnar neðst við jörðina? 2,37 m



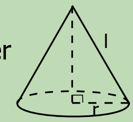
6. Keilulaga glas tekur 1,5 dl.

a. Hvað eru það margir rúmsentímetrar? 150 cm³

b. Ef glasið er 12 cm í þvermál hver er þá dýpt þess? 3,98 cm

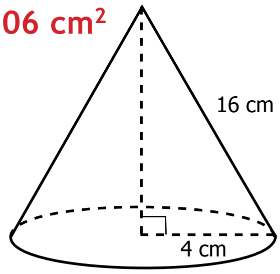
Keilur – yfirborðsflatarmál

Möttull keilu er
$M = \pi \cdot r \cdot l$

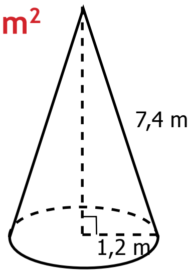


1. Reiknaðu flatarmál möttulsins á þessum keilum.

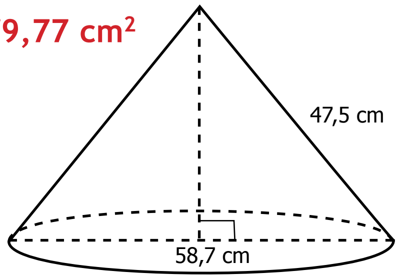
201,06 cm²



27,9 m²



4379,77 cm²



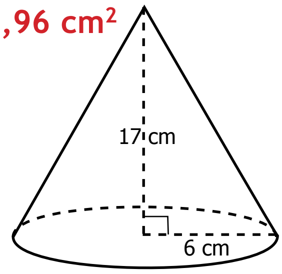
2. Þegar yfirborðsflatarmál keilna er fundið þarf bæði að finna flatarmál möttulsins og flatarmál grunnflatarins. Finndu flatarmál heildaryfirborðs keilnanna í dæmi 1.

251,33 cm² **32,42 m²** **7086 cm²**

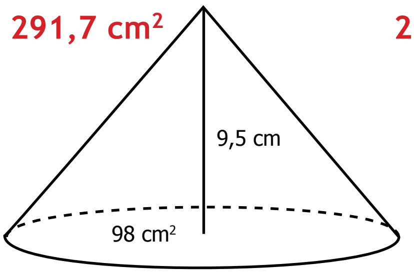
3. Hvaða leið myndir þú fara til að finna yfirborðsflatarmál keilu ef hæð hennar er gefin en ekki hliðarlengdin? Reiknaðu yfirborðsflatarmál þessara keilna.

Þarf að nota reglu Pýþagórasar til að finna hliðarlengdina.

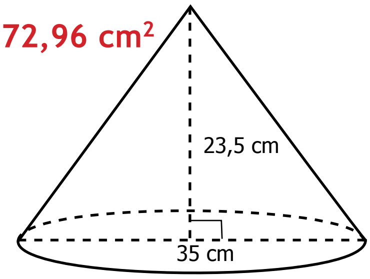
452,96 cm²



291,7 cm²



2572,96 cm²



4. Villi er að baka vöffluform fyrir ísbúð og veltir fyrir sér hve margir fersentímetrar fara í hvert form. Vöffluformið er 4,5 cm að þvermáli og er 11 cm á hæð.

Hve margir fersentímetrar af deigi fara í vöffluformið?

Villi fletur út deig sem er um það bil 60 cm á breidd og 75 cm á hæð. Hve mörg vöffluform getur hann fengið úr deiginu?

79,38 cm² fara í hvert form. Hann getur fengið um 56 vöffluform.

5. Ljósið frá ljósastaur myndar keilulaga birtu. Fjarlægðin frá toppi staursins að jaðri birtunnar er 9,2 m og út frá því hefur verið reiknað að flatarmál möttulsins er um 202 m². Finndu hvað staurinn lýsir upp stórt svæði á jörðu niðri. **153,5 m².**

Rúmmál keilu
$$\frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3}$$

Rúmmál pýramída
$$\frac{a \cdot b \cdot h}{3}$$

Pýramídar og keilur

1. Ef skoðaðar eru formúlur fyrir rúmmáli pýramída og keilna er í báðum tilfellum deilt með þremur. Hvers vegna telur þú að það sé?

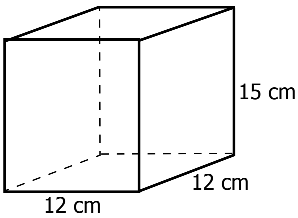
Það mætti draga þá ályktun að verið sé að finna þriðjung af einhverju en af hverju ætli það gæti verið?

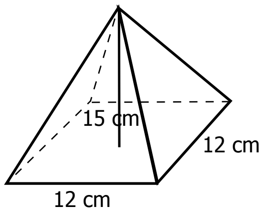
Rúmmál pýramída er þriðjungur af rúmmáli ferstrendings með sama grunnflöt og sömu hæð.

Rúmmál keilu er þriðjungur af rúmmáli sívalnings með sama grunnflöt og sömu hæð.

2. Skoðaðu ferstrending sem hefur hliðarlengdirnar 12 cm, 12 cm og 15 cm og pýramída sem hefur hliðarlengdir grunnflatar 12 cm og 12 cm og sömu hæð og ferstrendingurinn.

Ferstrendingur 2160 cm^3, pýramídi 720 cm^3. 720 · 3 = 2160

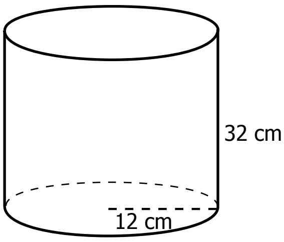


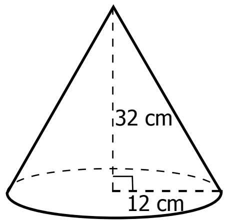


Reiknaðu rúmmál ferstrendingsins og pýramídans og kannaðu hvort rúmmál pýramídans sé $\frac{1}{3}$ af rúmmáli ferstrendingsins.

3. Skoðaðu nú sívalning og keilu sem bæði hafa sama geisla í grunnfleti og sömu hæð.

Sívalningur 14 476,5 cm^3, keila 4825,5 cm^3. 4825,5 · 3 = 14 476,5

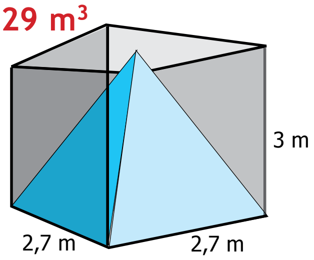




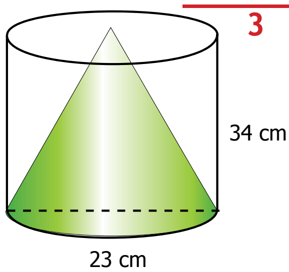
Reiknaðu rúmmál sívalningsins og keilunnar og kannaðu hvort rúmmál keilunnar sé $\frac{1}{3}$ af rúmmáli sívalningsins.

4. Notfærðu þér þessa vitneskju til þess að finna rúmmál loftrýmisins sem myndast á milli pýramída í ferstrendingi og keilu í sívalningi. Reyndu að finna þetta út aðeins með því að finna annaðhvort rúmmál pýramídans eða rúmmál ferstrendingsins.

$\frac{21,87}{3}$ = 7,29 m^3

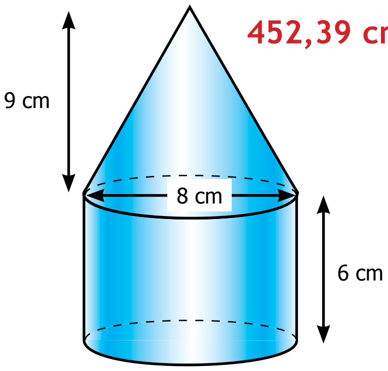


$\frac{14\,126,17}{3}$ = 4708,72 cm^3

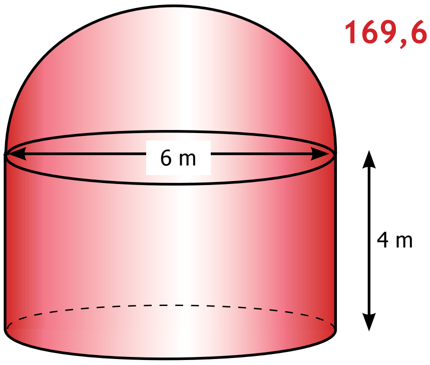


Samsett form

1. Notaðu þá þekkingu sem þú hefur á rúmmáli forma til þess að finna rúmmál eftirfarandi samsettra hluta.



452,39 cm³

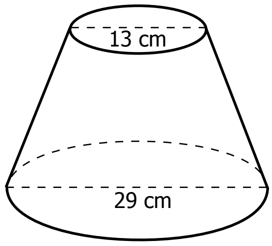


169,65 m³

2. Finndu yfirborðsflatarmál hlutanna í dæmi 1. Athugaðu að þú þarft ef til vill að notfæra þér reglu Pýþagórasar til að finna óþekktar lengdir. Gott er að hafa formúlublað við höndina.

324,85 cm² **160,22 cm²**

3. Hér má sjá hluta af keilu. Upphaflega var hún 47 cm á hæð en hér er búið að sneiða ofan af henni bút sem var 12 cm á hæð. Reiknaðu rúmmál hlutarins og yfirborðsflatarmál hans.



R = 9817,21 cm³ **Y = 2755,27 cm²**

4. Í verksmiðju einni er verið að hefja framleiðslu á glærum plasttrektum. Framleiðslustjórinn þarf að vita hve margir fersentímetrar af plasti fara í hverja trekt. Hver trekt er 12 cm í þvermál,10 cm há og stúturinn er 1,4 cm í þvermál og er 8 cm langur. Trektin sjálf er keilulaga og neðan af henni var tekinn bútur þar sem stúturinn var festur. Búturinn var 1,5 cm á hæð og var 1,4 cm í þvermál. Plastið í trektinni er að jafnaði 2 mm þykkt.

a. Hvert er yfirborðsflatarmál trektarinnar?
Yfirborðsflatarmálið er 276,02 cm².

b. Ef trektin yrði sléttfyllt af vatni, hvað myndi hún rúma mikið vatn?
Trektin rúmar 411,01 cm³ eða um 411 ml.

Teningakast – Hópverkefni

Vinnið saman tvö og tvö. Skráið hjá ykkur fræðilegu líkurnarnar á að fá 2 þegar teningi er kastað.

1. Búið til töflu eins og er hér fyrir neðan. Kastið teningnum 5 sinnum og skráið í töfluna hve oft 2 koma upp. Kastið svo teningnum aftur 5 sinnum og skráið í töfluna. Bætið við það sem á undan er komið. Reiknið út hlutfallstíðni eins og staðan er eftir hverja færslu. Haldið áfram þangað til þið hafið kastað teningnum 50 sinnum.

   Eftir því sem tilraunin er endurtekin oftar þá nálgast líkurnar sem byggðar eru á tilrauninni hinar fræðilegu líkur.

Dæmi:

Í fyrstu fimm köstunum komu 2 upp einu sinni. Í næstu fimm köstunum kom 2 aldrei upp. Í næstu fimm þar á eftir kom 2 upp 3 sinnum. Eftir þessi skipti leit taflan svona út:

Fjöldi kasta	Tíðni „2 kom upp"	Hlutfallstíðni
5	1	$\frac{1}{3} = 0{,}2 = 20\%$
10	1	$\frac{1}{10} = 0{,}1 = 10\%$
15	4	$\frac{1}{15} = 0{,}26 = 26\%$

2. Gerið línurit þar sem x-ás sýnir fjölda kasta og y-ás sýnir hlutfallstíðni í prósentum.

3. Nú taka tveir og tveir hópar sig saman og sameina niðurstöður sínar. Reiknið hlutfallstíðni fyrir hverja færslu. Bætið niðurstöðunum við fyrra línurit.

4. Sameinið aftur niðurstöður og haldið áfram með línuritið.

5. Skoðið línuritið. Eru líkurnar (hlutfallstíðnin) sem þið fáið úr tilraununum þær sömu og fræðilegu líkurnar? Verða einhverjar breytingar á líkunum eftir því sem köstin verða fleiri? Ræðið og skráið niðurstöður.

6. Skráið niður hugmyndir að líkindatilraunum sem þið gætuð gert á svipaðan hátt.

Endurteknar tilraunir

1. Hverjar eru líkurnar á að fá upp skjaldarmerkið þegar krónu er kastað upp? **$\frac{1}{2}$**

2. Hverjar eru líkurnar á að fá skjaldarmerkið tvisvar í röð? En þrisvar í röð? **$\frac{1}{4}$ og $\frac{1}{8}$**

3. Gunnhildur telur að það séu helmingslíkur á að fá skjaldarmerkið í kasti. Ef hún kastar peningi fjórum sinnum í röð telur hún að líkurnar séu $\frac{1}{16}$ á að fá skjaldarmerkið upp í öll skiptin. Er þetta rétt hjá henni? Rökstyddu svar þitt? **Rétt**

4. **a.** Hverjar eru líkurnar á því að fá slétta tölu þegar teningi er kastað? **$\frac{1}{2}$**

b. Teningi er kastað tvisvar sinnum, hverjar eru líkurnar á að fá slétta tölu í bæði skiptin? **$\frac{1}{4}$ og $\frac{1}{8}$**

c. Teningi er kastað þrisvar sinnum, hverjar eru líkurnar á að fá slétta tölu í öll skiptin? **$\frac{1}{8}$**

5. **a.** Skífunni er snúið einu sinni. Hverjar eru líkurnar á að örin lendi á hvítu svæði? **$\frac{1}{3}$**

b. Skífunni er snúið tvisvar. Hverjar eru líkurnar á að örin lendi á hvíta svæðinu tvisvar í röð? **$\frac{1}{9}$**

c. Skífunni er snúið þrisvar. Hverjar eru líkurnar á að örin lendi á hvíta svæðinu þrisvar í röð? **$\frac{1}{27}$**

6. **a.** Í poka eru tvær hvítar kúlur og ein svört. Ef dregin er kúla úr pokanum hverjar eru líkurnar á því að hún verði hvít? **$\frac{2}{3}$**

b. Ef dregið er tvisvar og kúlan sett aftur í pokann, hverjar eru líkurnar á því að kúlurnar verði báðar hvítar? En að fyrri kúlan verði hvít og sú seinni svört? **$\frac{4}{9}$ og $\frac{2}{9}$**

7. **a.** Skiptir það máli í dæminu hér á undan að kúlan var sett ofan í pokann aftur? Rökstyddu svar þitt.

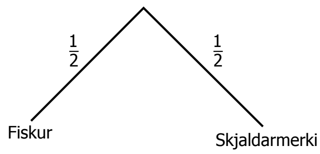
Það skiptir máli. Eiginn rökstuðningur.

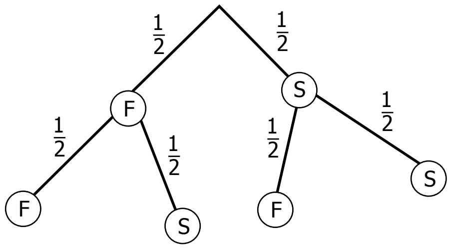
b. Ef kúlan sem dregin er fyrst er ekki sett aftur í pokann, hverjar verða þá líkurnar á því að fá tvær hvítar kúlur? En að fyrri kúlan verði hvít og sú seinni svört? En tvær svartar?

$\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, ekki er mögulegt að fá tvær svartar!

Líkindatré 1

Gunnhildi finnst oft gott að teikna myndir þegar hún leysir stærðfræðiverkefni. Hún veltir fyrir sér hvort hægt sé að teikna mynd sem sýni líkindin á að fá skjaldarmerki eða fisk þegar krónu er kastað upp. Fyrst teiknar hún mynd sem sýnir hvað getur gerst þegar kastað er einu sinni. Síðan heldur hún áfram og teiknar það sem getur gerst þegar kastað er tvisvar.

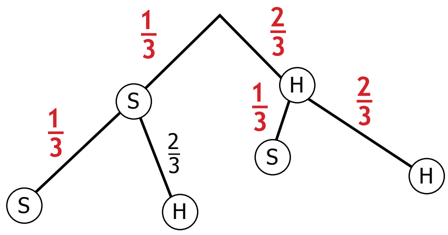




1. Skoðaðu myndirnar og finndu út hvernig þær eru gerðar og hvernig þær eru notaðar. Hverjar eru t.d. líkurnar á því að upp komi fiskur tvisvar í röð? En skjaldarmerkið? Hvað með að upp komi fyrst fiskur og síðan skjaldarmerki?

Líkur á fá fisk tvisvar í röð: $\frac{1}{4}$. Líkur á að fá skjaldarmerki tvisvar í röð er $\frac{1}{4}$ og einnig líkurnar á að fá fyrst fisk og síðan skjaldarmerki.

2. Myndin hér á eftir á að sýna hvað getur gerst þegar kúla er dregin tvisvar í röð úr poka með tveimur hvítum og einni svartri kúlu. *Kúlan er sett aftur í pokann.* Ljúktu við að skrá líkur við greinarnar á líkindatrénu.

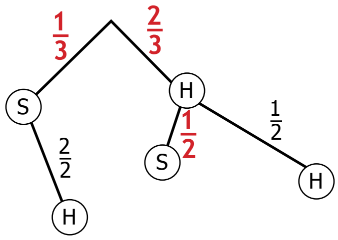


3. Notaðu líkindatréð til að svara eftirfarandi:

a. Hverjar eru líkurnar á að draga tvær svartar kúlur í röð?
b. Hverjar eru líkurnar á að draga fyrst svarta kúlu en síðan hvíta?
c. En fyrst hvíta og svo svarta?

a. $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ b. $\frac{2}{9}$ c. $\frac{2}{9}$

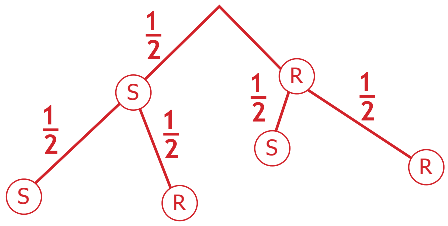
4. Hverjar verða líkurnar *ef kúlan er ekki sett ofan í pokann aftur?* Ljúktu við að skrá líkur á greinarnar.



5. Berðu saman líkindatrén í dæmi 2 og 4. Skráðu niður samanburð og útskýrðu hvers vegna myndirnar eru ekki eins.

Eiginn samanburður, en lykilatriði er að í fyrra tilvikinu er kúlan sett aftur í pokann en það er ekki gert í því seinna.

Líkindatré 2



1. Spil er dregið úr spilastokki og sett aftur í bunkann. Þetta er gert tvisvar. Teiknaðu líkindatré til að sýna líkurnar á að fá annaðhvort rautt spil eða svart. Skráðu líkurnar á greinarnar.

2. Spil er dregið tvisvar úr spilastokki og *ekki sett aftur í bunkann.* Athuga á líkur á að fá mannspil eða spil sem er ekki mannspil.

Líkurnar má allt eins skrá sem fullstytt brot, tugabrot eða prósentur.

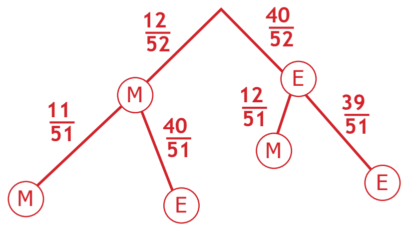
a. Teiknaðu líkindatré og skráðu líkindin inn á greinarnar.

b. Hverjar eru líkurnar á að fá tvö mannspil í röð? **5%**

c. Hverjar eru líkurnar á að fá fyrst mannspil en síðan ekki mannspil? **18%**

d. En ef þessu væri snúið við? **18%**

e. Hverjar eru líkurnar á að fá ekki mannspil? **59%**

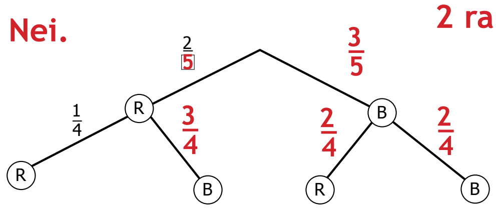


3. Myndin lýsir líkindum á því að draga rauðar eða bláar kúlur úr poka. Ljúktu við myndina og skráðu það sem myndin lýsir.

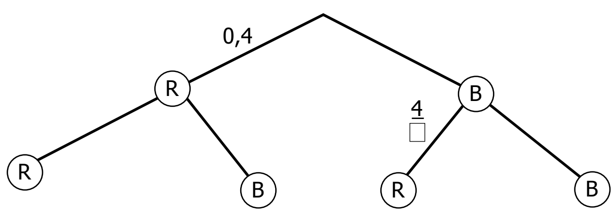
a. Er hægt að sjá hvað kúlurnar voru margar af hvorum lit í pokanum? **Já, þær eru fimm, 2 rauðar og 3 bláar.**

b. Voru þær settar aftur ofan í pokann? **Nei.**

c. Hvað var dregið oft? **Tvisvar.**

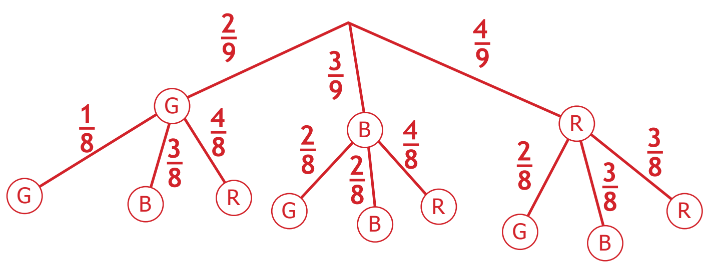


4. Myndin lýsir líkindum á því að draga rauðar eða bláar kúlur úr poka. Ljúktu við að skrá líkindin á greinarnar. Hve margar kúlur voru af hvorum lit?



Líkindin á því að draga fyrst rauða kúlu eru 0,4 eða 40%. Önnur vísbending er teljarinn 4. Kúlurnar gætu því verið 4 rauðar og 6 bláar eða margfeldi af fjöldanum. Ekkert í vísbendingunum gefur til kynna hvort kúlan er sett aftur í pokann. Lausnirnar geta verið nokkrar.

5. Í poka eru 9 kúlur, 2 gular, 3 bláar og 4 rauðar. Teiknaðu líkindatré sem lýsir því þegar dregið er tvisvar úr pokanum og *kúlurnar eru ekki settar aftur ofan í pokann.* Bættu við tréð þannig að það sýni líkindin ef dregið væri þrisvar.



Líkindatré 3

1. a. Hannes og félagar spila Ludo og þurfa að fá sex í teningakasti til að geta farið af byrjunarreit. Hverjar eru líkurnar á að fá sexu? $\frac{1}{6}$

b. Þeim gengur seint að byrja spilið og breyta reglunum þannig að til að fara af byrjunarreit þarf annaðhvort að fá 6 eða 2. Hverjar eru líkurnar núna? $\frac{1}{3}$

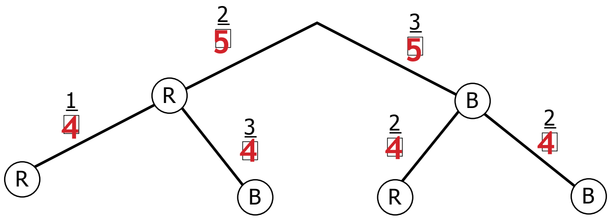
2. Myndin sýnir líkindi á möguleikum þegar kúla er dregin tvisvar í röð úr poka sem inniheldur tvær rauðar kúlur og þrjár bláar.

a. Hverjar eru líkurnar á að draga tvær rauðar kúlur? $\frac{1}{10}$

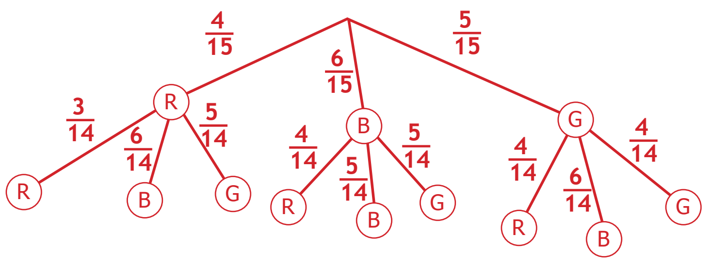
b. Hverjar eru líkurnar á að draga tvær bláar kúlur? $\frac{3}{10}$

c. Hverjar eru líkurnar á að draga tvær kúlur sem eru eins á litinn? $\frac{2}{5}$

d. Hverjar eru líkurnar á að draga tvær kúlur sem ekki eru eins á litinn? $\frac{3}{5}$



3. Í poka eru boltar í þremur litum, fjórir eru rauðir, sex bláir og fimm gulir.
Dreginn er bolti af handahófi tvisvar í röð úr pokanum.
Boltinn er ekki settur aftur í pokann. Ljúktu við myndina og skráðu líkindin á greinarnar.



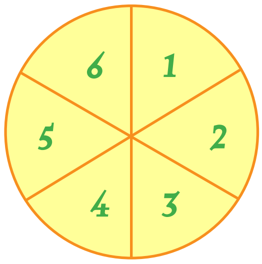
a. Hverjar eru líkurnar á að fá tvo bolta af sama lit? **29,5%**

b. Hverjar eru líkurnar á að fá rauðan og grænan bolta? **19%**

c. Hverjar eru líkurnar á að fá fyrst gulan og síðan bláan bolta? **14,3%**

d. Ef dregið yrði þrisvar, hverjar yrðu líkurnar á að fá þrjá gula bolta?
En þrjá bolta alla mismunandi á litinn? **2,2% og 26,4%**
(6 möguleikar á að draga 3 bolta alla að mismunandi lit).

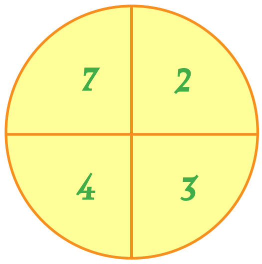
Líkur 1



1. Skífunni er snúið tvisvar og tölurnar margfaldaðar saman.
   a. Hverjar eru líkurnar á að margfeldið verði 5? $\frac{1}{18}$
   b. Hverjar eru líkurnar á að margfeldið verði 12? $\frac{1}{9}$

2. Ef skífunni væri snúið þrisvar sinnum og tölurnar margfaldaðar saman hverjar væru líkurnar á því að margfeldið yrði 24?

   $\frac{3}{32}$

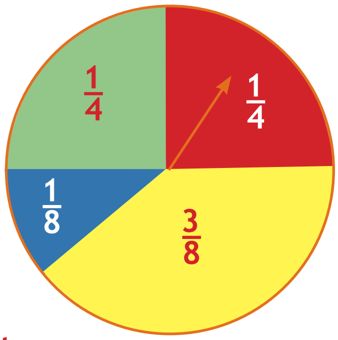


3. Skífunni er snúið tvisvar og tölurnar lagðar saman.
   Hverjar eru líkurnar á því að summan verði slétt tala?

   $\frac{1}{4}$

4. Skífu hefur verið snúið ótal sinnum og niðurstöður eru þessar:

   Grænn í 25% skiptanna.
   Rauður kom í 25% skiptanna.
   Blár kom í 12,5% skiptanna
   Gulur 37,5%



   Hvernig var skífan? Teiknaðu hana.
   $\frac{1}{4}$ skífunnar er grænn, $\frac{1}{4}$ er rauður, $\frac{1}{8}$ blár og $\frac{3}{8}$ er gulur.

5. Í poka eru 10 kúlur. Búið er að draga ótal sinnum og kúlan er alltaf sett aftur í pokann. Rauð kúla hefur hefur verið dregin 34 sinnum, svört 42 sinnum, gul 19 sinnum og blá 11 sinnum. Hve margar kúlur eru af hverjum lit?

   3 rauðar, 4 svartar, 2 gular og 1 blá.

Líkur 2

1. Líkur á að Þórður hitti í körfuna af vítapunkti í körfubolta eru 0,6.

a. Hverjar eru líkurnar á því að hann hitti tvisvar í röð?
En að hann hitti í hvorugt skiptið? **0,36 og 0,16**

b. Hverjar eru líkurnar á því að hann hitti aðeins í öðru kastinu? **0,48**

c. Á æfingu hefur Þórður hitt 24 sinnum í körfuna af vítapunkti.
Hve oft hefur hann skotið að körfunni miðað við að líkurnar á að hann hitti séu 0,6? **40 sinnum.**

2. Þór þjálfari skráir reglulega niður hjá sér skorhlutfall liðsmanna körfuboltaliðsins. Hann þarf að velja á milli Hrannars, Birgis og Baldurs til að spila í næsta leik. Hann ætlar að velja þann sem er með bestu líkur á að skora úr vítaköstum. Hvern myndir þú velja? Rökstyddu svarið. **Birgi.**

Hrannar	$\frac{15}{25}$	$\frac{14}{25}$	$\frac{13}{24}$	$\frac{14}{27}$
Birgir	$\frac{18}{30}$	$\frac{17}{25}$	$\frac{14}{19}$	$\frac{12}{18}$
Baldur	$\frac{13}{27}$	$\frac{14}{26}$	$\frac{17}{26}$	$\frac{13}{19}$

3. Anna líffræðingur rannsakar silunga í Litlavatni. Hún ætlar að áætla stofnstærð í vatninu. Hún veiðir 56 silunga, merkir þá og sleppir þeim aftur. Nokkrum dögum seinna veiðir hún 30 silunga og eru 2 af þeim merktir. Hvað getur hún áætlað að silungarnir séu margir í vatninu? **840 silungar. (Til að niðurstaðan verði öruggari þyrfti að endurtaka veiðarnar og reikna meðaltal.)**

4. Anna var fengin til að telja laxa í eldiskví. Hún veit að 75 merktir laxar eru í kvínni. Hún veiðir nokkrum sinnum og skráir niðurstöður. Í fyrstu tilraun veiddi hún 20 laxa og þrír af þeim voru merktir. Í annarri tilraun veiddi hún 25 laxa og fjórir af þeim reyndust merktir. Að síðustu veiddi hún 19 laxa og þrír af þeim voru merktir. Hver verður niðurstaða Önnu? **Um það bil 480 laxar í kvínni.**

Úrvinnsla úr könnun

1. Sigurfinnur og Júlíanna vinna saman að verkefni í félagsfræði. Þau ákveða að gera könnun á hve margir búa í hverri íbúð í fjölbýlishúsum. Hér má sjá niðurstöðurnar:

1, 3, 2, 1, 5, 5, 1, 3, 3, 4,
5, 6, 2, 2, 5, 5, 2, 2, 4, 2,
2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 1, 1, 3,
2, 2, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 5, 6,
4, 6, 4, 2, 4, 4, 5, 2, 2, 2,
3, 4, 2, 3, 2, 2, 1, 2, 2, 3,
4, 5, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4

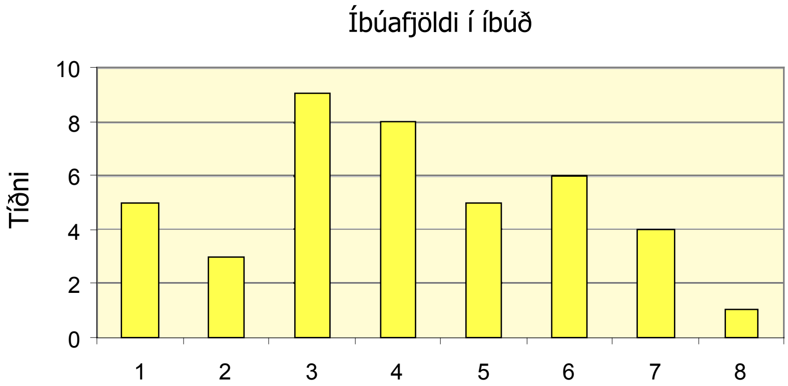
Fjöldi í íbúð	Tíðni	Margfeldi
1	10	10 · 1= 10
2		

Setjið gögnin í tíðnitöflu og búið til súlurit. Finnið meðaltal, miðgildi, tíðasta gildi og dreifingu.

Meðaltal: 2,97. Miðgildi: 3. Tíðasta gildi: 2. Dreifing: 5.

2. Sigurfinnur og Júlíanna bera niðurstöðurnar saman við eldri gögn. Þau eru með súlurit af gögnunum. Finnið meðaltal, miðgildi, tíðasta gildi og dreifingu út frá því.

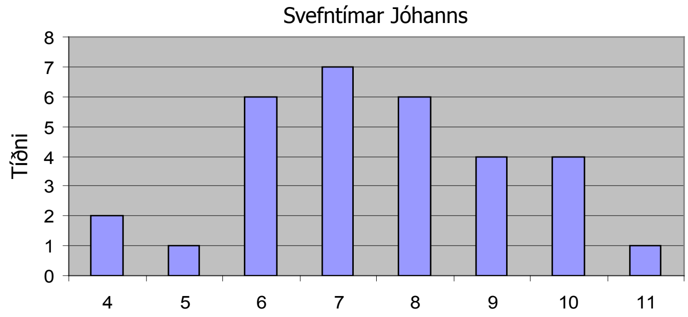
Meðaltal: 4,07. Miðgildi: 4. Tíðasta gildi: 3. Dreifing: 7.

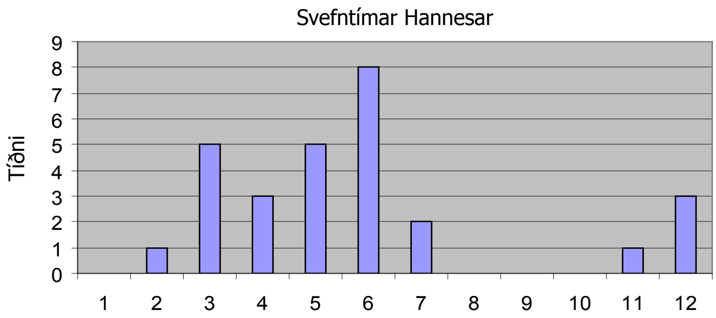


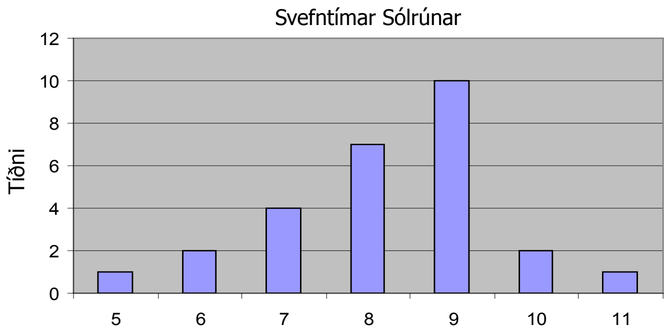
3. Skráið skýrslu um niðurstöðurnar. Lýsið hvorri athugun fyrir sig og berið þær saman.

Svefntímakönnun

Nemendur í 10. bekk gerðu könnun á svefntíma sínum. Hver nemandi skráði daglega hvað hann hafði sofið í margar klukkustundir. Eftir ákveðinn tíma skilaði hver nemandi niðurstöðum sínum í súluriti. Hér eru súluritin frá Jóhanni, Hannesi og Sólrúnu.







a. Í hve marga daga skráðu þau niður svefntímann? **Jóhannes í 31 dag, Hannes í 28 daga og Sólrún í 27 daga.**

b. Finnið meðaltal, miðgildi, tíðasta gildi og dreifingu fyrir hvert súlurit og notið til að bera saman svefnvenjur þeirra.

c. Túlkið niðurstöðurnar.

Jóhannes: Meðaltal 7,5 klst., miðgildi 7 klst., tíðasta gildi 7 klst. og dreifing 7 klst.
Hannes: Meðaltal 5,82 klst., miðgildi 6 klst., tíðasta gildi 6 klst. og dreifing 10 klst.
Sólrún: Meðaltal 8,22 klst., miðgildi 7 klst., tíðasta gildi 9 klst. og dreifing 6 klst.

Skutlukeppni

10. bekkur skipulagði skutlukeppni í skólanum. Allir þátttakendur bjuggu til sínar eigin skutlur og keppnin fór fram í sal skólans. Krakkarnir mældu nákvæmlega hve langt skutlurnar flugu og skráðu niðurstöðurnar.

Tölurnar eru í metrum.

1,53	2,10	3,12	8,15	8,30	4,15	5,55	6,38	4,62	6,75	6,91	2,45
1,52	1,67	7,82	6,93	10,39	9,65	7,05	7,60	9,43	9,78	8,55	7,50
8,42	4,25	4,26	5,78	6,76	9,78	10,34	5,65	5,63	5,40	1,75	2,56
9,75	10,30	10,45	11,10	10,35	8,54	6,70	5,75	12,00	10,94	10,35	

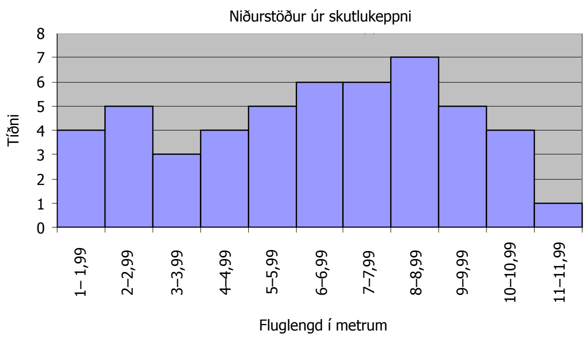
1. Flokkið gögnin og setjið í tíðnitöflu eins og byrjað er á hér að neðan.

Flokkar	Tíðni	Miðjan	Margfeldi
1–1,99	4	1,495 m	$4 \cdot 1{,}495 = 5{,}98$
2–2,99			

2. Finnið meðaltal fluglengdar skutlanna með hjálp tíðnitöflunnar. **6,9 metrar.**

3. Á netsíðu skólans fundu þau stuðlarit sem sýndi niðurstöður úr fyrstu skutlukeppni skólans. Notið stuðlaritið til að finna meðaltal og miðgildi fluglengdar í keppninni.

Meðaltal: 6,375 metrar. Miðgildi er ekki hægt að finna nákvæmlega þar sem einu gögnin sem þið hafið er stuðlaritið. Miðgildið er í flokknum 6 – 6,99 metrar.



4. Skrifaðu frétt um skutlukeppnina og berið niðurstöður hennar saman við niðurstöður úr fyrstu keppninni. Notið sem flestar tölur í samanburði á keppnunum, t.d. dreifingu, lægsta gildi, hæsta gildi, meðaltal og tíðasta gildi.

Lýsandi tölfræði

1. Þú átt að gera skýrslu um íbúafjölda sveitarfélaga á Norðurlandi 1. desember árið 1997 og aflar eftirfarandi upplýsinga um íbúafjölda frá Hagstofu Íslands:

Akureyri15 048, Norðurbyggð 2493, Ólafsfjarðarbær 1098, Dalvík 1502, Svarfaðardalshreppur 239, Hríseyjarhreppur 241, Árskógshreppur 335, Arnarneshreppur 209, Skriðuhreppur 104, Öxnadalshreppur 45, Glæsibæjarhreppur 255, Eyjafjarðarsveit 928, Svalbarðsstrandarhreppur 342, Grýtubakkahreppur 375, Hálshreppur 185.

a. Finndu meðaltal, dreifingu, miðgildi og tíðasta gildi fyrir íbúafjöldann.
Meðaltal: 1559,9, dreifing: 15003, miðgildi: 335. Ekkert tíðasta gildi. (Ef gögnin væru flokkuð þá kæmi fram tíðasta gildi).

b. Mikill munur er á íbúafjölda Akureyrar og hinna sveitarfélaganna á listanum. Endurtaktu útreikningana en hafðu Akureyri ekki með í þetta sinn.
Meðaltal: 596,5 , dreifing: 2448, miðgildi: 295. Ekkert tíðasta gildi.

c. Berðu niðurstöðurnar saman. Hvort telur þú miðgildið eða meðaltalið betra til að lýsa íbúafjölda í sveitarfélögunum? Skráðu rökstuðning.
Eigin rökstuðningur.

2. Aldur þátttakenda á skákmóti í Fjallaskóla.

11, 12, 12, 13, 16, 15, 13, 14, 40, 15, 14, 14, 13, 11, 14

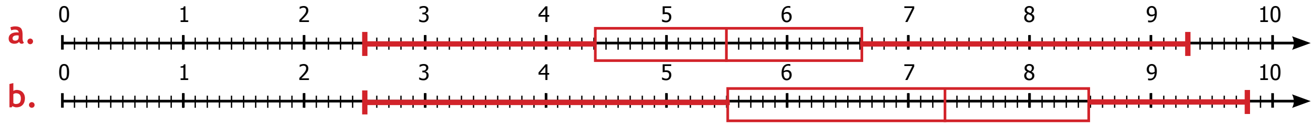
a. Finndu meðaltal, dreifingu, miðgildi og tíðasta gildi fyrir aldur þátttakendanna, bæði með elsta þátttakandanum og án hans.
Fyrri talan sýnir útreikninga með *útlaga* og sú síðari er án *útlagans*. Meðaltal: 15,13 og 13,35. Dreifing: 29 og 5. Miðgildi: 14 og 13. Tíðasta gildi: 14 og 14.

b. Í tölfræði er tala sem er langt frá öðrum tölum kölluð „útlagi". Hvaða áhrif hafði útlaginn á dreifingu, meðaltal, tíðasta gildi og miðgildi skákhópsins?
Eigin rökstuðningur.

3. Laufritin sýna niðurstöður úr tveimur tölfræðiprófum. Merktu einkunnirnar inn á talnalínurnar og teiknaðu rammarit á línurnar.

2	5
3	4, 6, 8
4	2, 3, 5, 6
5	3, 4, 5, 6, 8
6	3, 4, 7, 8,
7	5, 7
8	4
9	3

2	5
3	4
4	2, 3
5	5, 6, 8
6	7, 8
7	2, 3, 5, 7, 8
8	3, 5, 6
9	3, 3, 4, 8



4. Skráðu samanburð á niðurstöðum úr prófunum og notaðu tölfræðihugtökin dreifingu, miðgildi, tíðasta gildi og meðaltal í textanum.
Eigin samanburður.

Almenn brot og veldi

Almenn brot – ýmis dæmi 1

Mundu að þegar leggja á saman brot eða finna mismun þeirra þá þarf fyrst að finna þeim samnefnara.

1. Leggðu saman brotin og fullstyttu svörin. Sýndu alla útreikninga.

a. $\frac{5}{8} + \frac{7}{10} = \frac{53}{40}$ **b.** $\frac{12}{15} + \frac{9}{25} = \frac{29}{25}$ **c.** $\frac{11}{24} + \frac{13}{36} = \frac{59}{72}$ **d.** $\frac{48}{104} + \frac{15}{52} = \frac{3}{4}$

2. Finndu mismun brotanna. Fullstyttu svörin og sýndu alla útreikninga.

a. $\frac{8}{11} - \frac{4}{8} = \frac{5}{22}$ **b.** $\frac{15}{24} - \frac{5}{8} = 0$ **c.** $\frac{52}{98} - \frac{22}{66} = \frac{29}{147}$ **d.** $\frac{79}{112} - \frac{48}{96} = \frac{23}{112}$

3. Margfaldaðu saman brotin og fullstyttu svörin. Sýndu alla útreikninga.

a. $\frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{18}$ **b.** $\frac{8}{11} \cdot \frac{7}{10} = \frac{28}{55}$ **c.** $\frac{11}{16} \cdot \frac{4}{3} = \frac{11}{12}$ **d.** $\frac{27}{32} \cdot \frac{19}{16} = \frac{513}{512}$

4. Deildu brotunum og fullstyttu. Sýndu alla útreikninga. Mundu að gott er að notfæra sér margföldunarandhverfur brota til að einfalda útreikninga.

a. $\frac{8}{10} : \frac{4}{6} = \frac{6}{5}$ **b.** $\frac{15}{12} : \frac{5}{11} = \frac{11}{4}$ **c.** $\frac{26}{46} : \frac{15}{18} = \frac{78}{115}$ **d.** $\frac{79}{46} : \frac{12}{18} = \frac{237}{92}$

5. Reiknaðu dæmin, fullstyttu og sýndu hvernig þú ferð að.

a. $\frac{4}{5} + \frac{5}{9} + \frac{2}{3} = \frac{91}{45}$

b. $\frac{12}{15} + \frac{7}{11} + \frac{6}{10} = \frac{112}{55}$

c. $\frac{45}{24} - \frac{9}{14} - \frac{6}{26} = \frac{729}{728}$

d. $\frac{4}{6} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{2}{7} = \frac{4}{27}$

e. $\frac{12}{17} \cdot \frac{31}{20} : \frac{1}{3} = \frac{31}{85}$

f. $3\frac{13}{16} + 6\frac{4}{10} = 10\,\frac{17}{80}$

g. $7\frac{8}{15} - 3\,\frac{5}{9} = 3\,\frac{44}{45}$

h. $5\,\frac{17}{20} \cdot 3\,\frac{1}{5} = 18\frac{18}{25}$

i. $9\,\frac{4}{8} : \frac{3}{5} = 15\,\frac{5}{6}$

Brotabrot

1. Reiknaðu dæmin og fullstyttu. Sýndu útreikninga þína.

a. $$\frac{\frac{4}{5}}{\frac{6}{9}} = \frac{6}{5}$$

b. $$\frac{\frac{15}{13}}{\frac{8}{12}} = \frac{45}{26}$$

c. $$\frac{\frac{18}{14}}{\frac{6}{7}} = \frac{3}{2}$$

d. $$\frac{\frac{23}{28}}{\frac{21}{26}} = \frac{299}{294}$$

2. Reiknaðu dæmin, fullstyttu og sýndu hvernig þú ferð að.

a. $$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}} = 5$$

b. $$\frac{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}}{\frac{6}{5}+\frac{3}{8}} = \frac{170}{189}$$

c. $$\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{5}}{\frac{4}{6}+\frac{1}{3}} = \frac{9}{10}$$

d. $$\frac{\frac{5}{8}+\frac{4}{9}}{\frac{6}{11}+\frac{48}{33}} = \frac{77}{144}$$

3. Reiknaðu dæmin, fullstyttu og sýndu hvernig þú ferð að.

a. $$\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}-\frac{1}{6}} = 2$$

b. $$\frac{\frac{1}{3}-\frac{2}{4}}{\frac{1}{5}+\frac{2}{6}} = -\frac{5}{16}$$

c. $$\frac{\frac{1}{2}+\frac{5}{4}}{\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{10}} = 21$$

d. $$\frac{\frac{1}{3}+\frac{5}{6}}{\frac{7}{8}\cdot\frac{2}{3}} = 2$$

4. Í dæmunum hér fyrir neðan koma bæði tölustafir og bókstafir fyrir. Á sama hátt og áður þarf að finna samnefnara þegar brot eru lögð saman eða mismunur þeirra fundinn. Reiknaðu og einfaldaðu brotin eins og hægt er. Sýndu hvernig þú ferð að.

a. $$\frac{\frac{3}{x}+\frac{4}{2x}}{\frac{x}{1}+\frac{3x}{5}} = \frac{25}{8x^2}$$

b. $$\frac{\frac{5}{2x}+\frac{3}{3x}}{\frac{3}{x}+\frac{4}{2x}} = \frac{7}{10}$$

c. $$\frac{\frac{7}{4x}-\frac{3}{2x}}{\frac{2}{2x}+\frac{1}{4x}} = \frac{1}{5}$$

d. $$\frac{\frac{3x}{5}\cdot\frac{4}{2x}}{\frac{3}{4x}\cdot\frac{6x}{5}} = \frac{4}{3}$$

e. $$\frac{\frac{6}{x}\cdot\frac{2}{2x}}{\frac{3}{2x}\cdot\frac{7}{8x}} = \frac{32}{7}$$

f. $$\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}}{\frac{3}{x}+\frac{5}{6}} = \frac{9}{5x+18}$$

Veldi og veldareglur

1. Reiknaðu.

a. $2^4 = 16$ **b.** $3^4 = 81$ **c.** $4^4 = 256$

2. Reiknaðu.

a. $2^{-4} = \frac{1}{16}$ **b.** $3^{-4} = \frac{1}{81}$ **c.** $4^{-4} = \frac{1}{256}$

3. Reiknaðu.

a. $2^4 \cdot 2^{-4} = 1$ **b.** $3^4 \cdot 3^{-4} = 1$ **c.** $4^4 \cdot 4^{-4} = 1$

4. Reiknaðu.

a. $1{,}2^3 = 1{,}728$ **c.** $1{,}2^3 \cdot 1{,}2^{-3} = 1$ **e.** $0{,}85^{-4} = 1{,}92$

b. $1{,}2^{-3} = \frac{1}{1{,}728}$ **d.** $0{,}85^4 = 0{,}522$ **f.** $0{,}85^4 \cdot 0{,}85^{-4} = 1$

Notaður veldareglurnar til að reikna dæmin.

$\boxed{ax \cdot ay = ax + b}$ $\boxed{ax : ay = ax - y}$ $\boxed{(ax)y = ax \cdot y}$ $\boxed{a^0 = 1}$

5. **a.** $4^5 \cdot 4^3 = 4^8$ **b.** $x^3 \cdot x^4 = x^7$ **c.** $y^6 \cdot y - 2 = y^4$

6. **a.** $2^5 : 2^4 = 2$ **b.** $\frac{3^4}{3^2} = 3^2 = 9$ **c.** $x^7 : x^4 = x^3$

7. **a.** $\frac{3^3 \cdot 2^8}{2^5 \cdot 3^4} = \frac{2^3}{3} = \frac{8}{2}$ **b.** $\frac{x^3 \cdot y^3}{x^2 \cdot y^4} = \frac{x}{y}$ **c.** $\frac{a^5\, b^3\, c^8}{a^2\, b^4\, c^8} = \frac{a^3}{b}$

8. **a.** $(4^2)^3 = 4^6$ **b.** $(3x^2)^3 = 27x^6$ **c.** $\left(\frac{2yx^2}{4z^4}\right)^3 = \frac{y^3x^6}{8z^{12}}$

9. **a.** $10^0 = 1$ **b.** $(y^2 + 2)^0 = 1$ **c.** $3 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^0 = 3 \cdot 1 = 3$

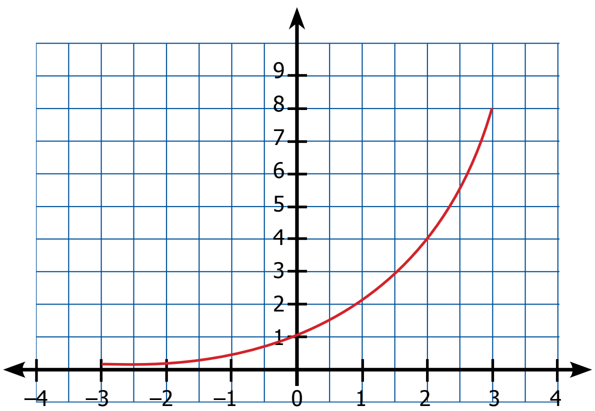
10. Gefið er fallið $y = 2^x$

a. Búðu til gildistöflu fyrir

$x = -3$
$x = -2$
$x = -1$
$x = 0$
$x = 1$
$x = 2$
$x = 3$

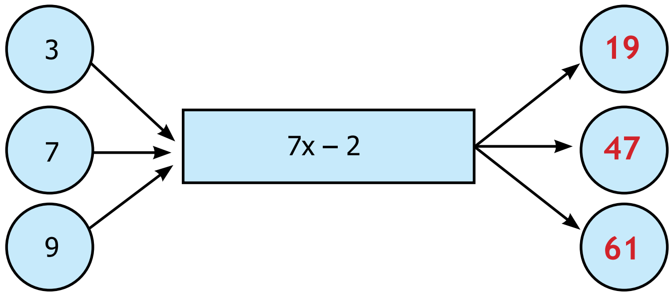
x	2^x
−3	0,125
−2	0,25
−1	0,5
0	1
1	2
2	4
3	8

b. Teiknaðu fallið í hnitakerfi.

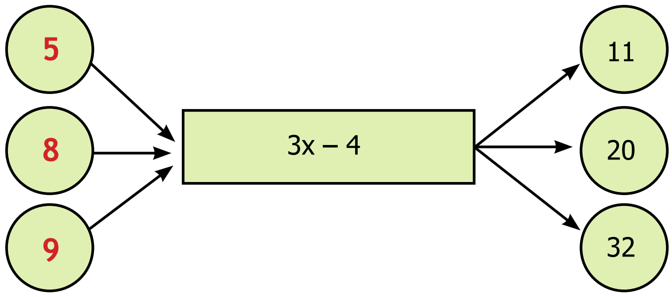


Gildi stæðna

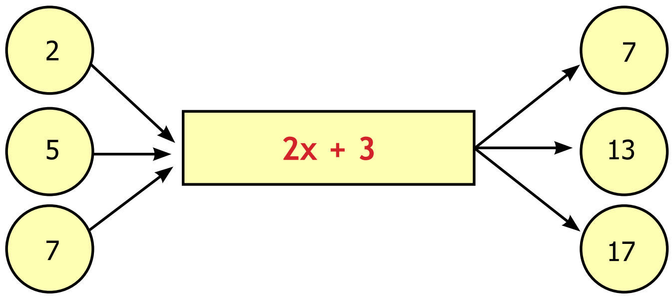
1. Finndu gildi stæðunnar.



2. Finndu gildi x.



3. Finndu stæðuna.



4. Það kostar 110 kr. í sund fyrir börn og 360 kr. fyrir fullorðna.
Hópur með x fullorðnum og y börnum kemur í sundlaugar.
Hvað þýðir eftirfarandi?

a. x + y **b.** 110x **c.** 360x + 110y

d. Skráðu spurninguna sem leiðir til eftirfarandi reiknings og sýndu niðurstöðuna: 110 · 5 + 360 · 4

a. Fjöldi fullorðinna + fjöldi barna.
b. Kostnaður í sund fyrir x fjölda barna.
c. Kostnaður í sund fyrir x fjölda fullorðinna og y fjölda barna.
d. Hve mikið þarf að borga í sund fyrir 5 börn og 4 fullorðna.

5. Orri er með x tíukrónu peninga og y fimmtíukrónu peninga.

a. Skrifaðu stæðu fyrir heildarfjölda mynta. **a. x + y**

b. Skráðu heildarsummu í krónum. **b. 10x + 50y**

Lausnir

Stæður einfaldaðar

1. Gunna, Kata og Þura eiga að einfalda stæðuna $5(x-6)$.
Gunna fær: $5(x-6) = 5x - 56$
Kata fær: $5(x-6) = 5x - 30$
Þura fær: $5(x-6) = 5x - 11$
Hver reiknar rétt? Hvaða villur gera hinar?

Kata reiknar rétt. Gunna og Þuríður reikna ekki rétt upp úr sviganum.

2. Einfaldaðu stæðurnar.

a. $5 + 4x + 3 + 8x$
$8 + 12x$

b. $5 + 4(x + 3)$
$17 + 4x$

c. $3x + 2(x + 4)$
$8 + 5x$

3. Einfaldaðu stæðurnar og reiknaðu gildi þeirra þegar $x = 4$.

a. $5 + 8x - 4 - 6x$
$1 + 2x$

b. $6 + 2(x +3)$
$12 + 2x$

c. $9 - 3(x - 1)$
$12 - 3x$

d. $7 - 3(x - 2)$
$13 - 3x$

e. $5x - 3(x + 1)$
$2x - 3$

f. $8x - 4(x - 5)$
$4x + 20$

4. Einfaldaðu stæðurnar og reiknaðu gildi þeirra þegar $x = 5$.

a. $\frac{3x}{12x} = \frac{1}{4}$ **b.** $\frac{3x}{4} \cdot \frac{8}{6x} = 1$ **c.** $\frac{6x}{2} \cdot \frac{3}{9x} = 1$ **d.** $\frac{2x + 6}{4x + 2} = \frac{x + 3}{2x + 1}$

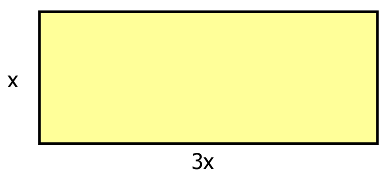
5. Þáttaðu og einfaldaðu stæðurnar.

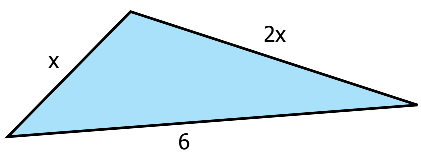
a. $\frac{3a + 9b}{6a + 12} = \frac{a + 3b}{2a + 4}$ **b.** $\frac{7a - 14}{4a + 6} = \frac{7(a - 2)}{2(2a + 3)}$ **c.** $\frac{4y - 6z}{4y + 2z} = \frac{2y - 3z}{2y + z}$

6. Hvers vegna er útkoman úr dæminu ekki rétt? $\frac{5z - 15}{5z + 10} = \frac{-3}{2}$
Rökstyddu svar þitt.

$= \frac{5x - 15}{5z + 10} = \frac{5(z - 3)}{5(z + 2)} = \frac{z - 3}{z + 2}$

7. Skoðaðu eftirfarandi myndir

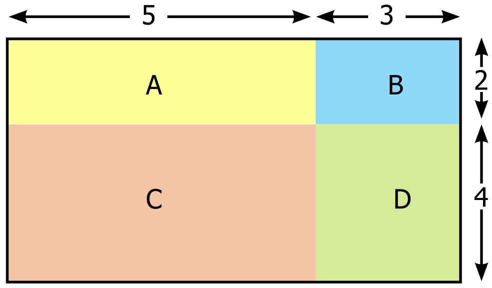




a. Skráðu stæðu fyrir ummálið
b. Reiknaðu ummálið ef $x = 3$
c. Finndu x ef ummálið er 12

a. $U_{\text{rétthyrnings}} = 8x$ og $U_{\text{þríhyrings}} = 3x + 6$
b. $U_{\text{rétthyrnings}} = 24$ og $U_{\text{þríhyrnings}} = 15$
c. $x_{\text{rétthyrnings}} = 1{,}5$ og $x_{\text{þríhyrnings}} = 2$

Margföldun liðastærða



1. **a.** Hvert er flatarmál rétthyrningsins? 48

b. Hvert er flatarmál svæðis A? 10

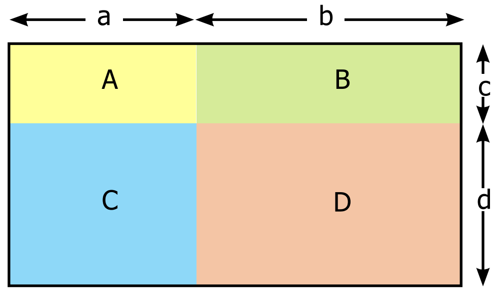
c. Hvert er flatarmál svæðis B? 6

d. Hvert er flatarmál svæðis C? 20

e. Hvert er flatarmál svæðis D? 12

f. Hvert er samanlagt flatarmál svæðis A, B, C og D? 48

g. Berðu saman niðurstöður úr lið a) og f). Hvers vegna færðu sömu niðurstöðu? Rökstyddu svarið.



2. **a.** Hvert er flatarmál rétthyrningsins?
$(a+b)(c+d) = ac + bc + ad + bd$

b. Hvert er flatarmál svæðis A? ac

c. Hvert er flatarmál svæðis B? bc

d. Hvert er flatarmál svæðis C? ad

e. Hvert er flatarmál svæðis D? bd

f. Hvert er samanlagt flatarmál svæðis A, B, C og D? $ac + bc + ad + bd$

g. Berðu saman niðurstöður úr lið a) og f). Hvers vegna færðu sömu niðurstöðu? Rökstyddu svarið.

3. Margfaldaðu liðastærðirnar og sýndu hvernig þú ferð að.

a. $(10 + 4)(10 + 9) = 226$ **c.** $(20 + 6)(10 + 3) = 338$ **e.** $(10 + 7)(30 - 8) = 374$

b. $(10 + 5)(40 + 6) = 690$ **d.** $(20 + 1)(10 - 9) = 21$ **f.** $(10 - 7)(20 - 9) = 33$

Mundu eftir reglunni um margföldun tveggja sviga $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

4. Margfaldaðu liðastærðirnar.

a. $(a + 5)(a + 9)$
$a^2 + 14a + 45$

c. $(y + 6)(y + 2)$
$y^2 + 8y + 12$

e. $(x + 7)(2x - 3)$
$2x^2 + 11x - 21$

b. $(x + 4)(x + 6)$
$x^2 + 10x + 24$

d. $(2a + 1)(3a - 9)$
$6a^2 - 15a - 9$

f. $(3y - 8)(2y - 2)$
$6y^2 - 24y + 16$

5. Margfaldaðu liðastærðirnar.

a. $5(a + 2)(a + 3)$
$5a^2 + 25a + 30$

c. $2(y - 1)(y + 4)$
$2y^2 + 6y - 8$

e. $x(x + 3)(x - 3)$
$x^3 - 9x$

b. $2(x + 4)(x - 5)$
$2x^2 - 2x - 40$

d. $3(x + 4)(x - 3)$
$3x^2 + 3x - 36$

f. $y(y + 8)(y - 2)$
$y^3 + 6y^2 - 16y$

Stæður þáttaðar

1. Gunna, Kata og Þura eiga að þátta stæðuna $2x^3 - 4x^2 - 6x$.

Gunna fær: $2(x^3 - 2x^2 - 3x)$

Kata fær: $2x(x^2 - 2x - 3)$

Þura fær: $2x(x + 1)(x - 3)$

Hver er með réttasta svarið?

Hvaða þurfa hinar að gera til að fá rétt svar?

Þuríður er með réttasta svarið. Gunna á eftir að taka x út fyrir sviga og þátta það sem er þá í sviganum. Þuríður á eftir að þátta svigann.

2. Skráðu rétta tölu í eyðurnar.

a. $x^2 - 121 = (x + 11)(x - 11)$

b. $x^2 - \underline{49} = (x + 7)(x - 7)$

c. $x^2 + \underline{16x} + 64 = (x + 8)^2$

d. $x^2 - 8x + \underline{16} = (x - 4)^2$

3. Þáttaðu eftirfarandi stæður.

a. $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$

b. $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$

c. $x^2 - 100 = (x + 10)(x - 10)$

d. $x^2 - 36 = (x + 6)(x - 6)$

4. Skráðu rétta tölu í eyðuna þannig að hægt sé að þátta með ferningsreglu. Þáttaðu síðan stæðurnar.

a. $x^2 + 18x + \underline{81} = (x + 9)^2$

b. $x^2 + 22x + \underline{121} = (x + 11)^2$

c. $x^2 - 16x + \underline{64} = (x - 8)^2$

d. $x^2 - 22x + \underline{121} = (x - 11)^2$

5. Skráðu rétta tölu í eyðuna. Þáttaðu síðan stæðurnar.

a. $x^2 - \underline{81} = (x + 9)(x - 9)$

b. $x^2 - \underline{144} = (x + 12)(x - 12)$

c. $x^2 - \underline{4} = (x + 2)(x - 2)$

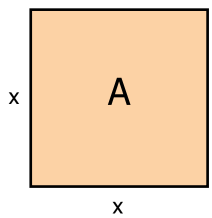
d. $x^2 - \underline{169} = (x + 13)(x - 13)$

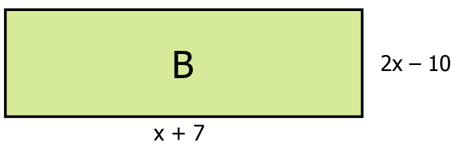
6. Finndu flatarmál ferningsins A og rétthyrningsins B ef:

a. $x = 7$ A = 49, B = 56

b. $x = 9$ A = 81, B = 128

c. $x = 12$ A = 144, B = 266





Brot á algebruformi

Þegar reikna á brot í algebruformi þarf að finna samnefnara við samlagningu og frádrátt alveg eins og um venjuleg brot væri að ræða. Munurinn er sá að við erum ekki aðeins með tölustafi heldur bókstafi líka. Gott getur verið að frumþátta nefnara til að auðvelda fund samnefnara og við styttingu brotanna er oft gott að þátta stæðurnar.

1. Reiknaðu dæmin og styttu þau eins og hægt er.

a. $\frac{x}{5} + \frac{2x}{3} = \frac{13x}{5}$ **c.** $\frac{2}{3x} + \frac{3}{2x} = \frac{13}{x}$ **e.** $\frac{18}{3a} - \frac{3}{a} = \frac{3}{x}$ **g.** $\frac{8}{6x} - \frac{10}{3x} = -\frac{2}{x}$

b. $\frac{4}{2x} + \frac{6}{x} = \frac{8}{x}$ **d.** $\frac{6}{ab} + \frac{4}{3b} = \frac{18 + 4a}{3ab}$ **f.** $\frac{12}{4x} - \frac{3}{x^2} = \frac{3x - 3}{x^2}$ **h.** $\frac{5y}{y} - \frac{3y^2}{y^2} = 2$

2. Reiknaðu og fullstyttu brotin þar sem hægt er.

a. $\frac{3x}{4} \cdot \frac{2}{3x} = \frac{1}{2}$ **c.** $\frac{3a}{12} \cdot \frac{4ab}{3b} = \frac{a^2}{3}$ **e.** $\frac{6x}{4} : \frac{3x}{2} = 1$ **g.** $\frac{7}{12x^2} : \frac{5}{3x} = \frac{7}{20x}$

b. $4y \cdot \frac{5x}{8y} = \frac{5x}{2}$ **d.** $\frac{3y}{5x} \cdot \frac{10x}{xy} = \frac{6}{x}$ **f.** $\frac{3ab}{5} : \frac{6b}{4} = \frac{2a}{5}$ **h.** $3x : \frac{15}{5x} = x^2$

3. Reiknaðu og einfaldaðu brotin eins og hægt er.

a. $\frac{x + 3}{4} + \frac{x + 4}{3} = \frac{7x + 25}{12}$

b. $\frac{2x - 3}{5} + \frac{x + 4}{3} = \frac{11x + 11}{15}$

c. $\frac{3x + 3}{3} - \frac{2x - 3}{4} = \frac{2x + 7}{4}$

d. $\frac{2x + 2}{4} \cdot \frac{3}{x + 3} = \frac{3x + 3}{2x + 6}$

e. $\frac{7}{7x - 14} \cdot \frac{4x - 3}{2} = \frac{4x - 3}{2x - 4}$

f. $\frac{3x - 1}{2} \cdot \frac{7}{6x - 2} = \frac{7}{4}$

g. $\frac{2x + 1}{2x} \cdot \frac{4x - 2}{x + 1} = \frac{4x^2 - 1}{x^2 + x}$

h. $\frac{x - 5}{7x} : \frac{3x}{x + 5} = \frac{x^2 - 25}{21x^2}$

i. $\frac{2x + 3}{-2} : \frac{5x + 1}{3x - 3} = \frac{6x^2 + 3x - 9}{5x^2 - 9x - 2}$

Að leysa jöfnur 1

1. Körfuboltalið fær 3 stig fyrir sigur, 1 stig fyrir jafntefli og ekkert stig fyrir tap. Eitt keppnistímabil lék lið 13 heimaleiki og jafnmarga útileiki. Hve mörg stig fékk liðið ef:

a. Það vann alla heimaleikina?

b. Gerði jafntefli í þremur útileikjum?

c. Vann 8 heimaleiki, tapaði 8 útileikjum og gerði jafntefli í öðrum leikjum?

a. 39
b. 3
c. $3 \cdot 8 + 5 + 5 = 34$

2. Skráðu regluna og sýndu hvernig þú leysir jöfnurnar.

> Reglan er;
> Hugsaðu þér tölu.
> Bættu 5 við töluna.
> Margfaldaðu með 2.

a. Hvaða tölu hugsaði Orri sér ef hann fékk 36?

b. Hvaða tölu hugsaði Tess sér ef hún fékk 16?

a. $2(x + 5) = 36$ og $x = 13$
b. $2x + 10 = 16$ og $x = 3$

3. **a.** Prófaðu nokkrar mismunandi tölur. Færðu alltaf sama svarið?
b. Útskýrðu niðurstöðu þína með því að skrá regluna sem jöfnu.

> Reglan er;
> Hugsaðu þér tölu.
> Bættu 4 við töluna.
> Margfaldaðu með 2.
> Dragðu frá 2 sinnum þá tölu sem þú hugsaðir þér.
> Hvaða tölu færðu?

Já, $2(x + 4) - 2x = 8$

4. Prófaðu nokkrar mismunandi tölur. Færðu alltaf sama svarið? Útskýrðu niðurstöðu þína með því að skrá regluna sem jöfnu.

> Reglan er;
> Hugsaðu þér tölu.
> Tvöfaldaðu töluna.
> Bættu 1 við.
> Margfaldaðu með 5.
> Dragðu 5 frá.
> Hvaða tölu færðu?

Nei, $5(2x + 1) - 5 = 10x$. Ég fæ 10 sinnum stærri tölu.

Að leysa jöfnur 2

1. Tengdu saman jafngildar jöfnur?

$x = 2$
$4x + 2 = 10$

$x = 2$
$x + 1 = 3$

$x = 4$
$6x + 3 = 27$

$x = 4$
$5x + 1 = 21$

$x = 3$
$4x + 2 = 14$

$x = 4$
$10x + 3 = 43$

$x = 4$
$2x - 6 = 2$

$x = 3$
$3x - 3 = 6$

$x = 3$
$7x - 3 = 18$

2. Leystu jöfnurnar og sýndu hvernig þú ferð að.

a. $2(x + 1) + 2(x + 3) = 16$
$x = 2$

c. $1 + (x - 2) = 6 + (3 - 4x)$
$x = 2$

b. $3(x - 1) + 5(2x - 3) = 21$
$x = 3$

d. $2 - (3 - x) = 5 + (2 - 3x)$
$x = 2$

3. Leystu jöfnurnar. Kannaðu fyrst hvaða tölu þarf að margfalda báðar hliðar með til að einangra x.

a. $\frac{x}{11} = 2$ $x = 22$

c. $\frac{x}{6} = \frac{2}{3}$ $x = 24$

b. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 20$ $x = 24$

d $\frac{3}{4} = \frac{3x}{24}$ $x = 6$

4. Ef tala er margfölduð með 8 kemur út talan 96. Hver er talan? $x = 12$

Að leysa jöfnur 3

1. Mismunur tveggja talna er 10. Hærri talan er þreföld lægri talan. Hverjar eru tölurnar?

5 og 15

2. Kannaðu hvort 5 gangi alltaf upp í summu fimm samliggjandi heilla talna.

Já, x + 2

3. Summa þriggja samliggjandi sléttra talna er 342. Finndu tölurnar.

Tölurnar eru 113, 114 og 115.

4. Gunna, Kata og Þura leysa allar sömu jöfnuna en fá mismunandi svör.

Gunna fær:	Kata fær:	Þura fær:
$2(5 + 4x) = 26$	$2(5 + 4x) = 26$	$2(5 + 4x) = 26$
$10 + 8x = 26$	$10 + 4x = 26$	$2 + 8x = 26$
$8x = 16$	$4x = 16$	$8x = 24$
$x = 2$	$x = 4$	$x = 3$

Hver reiknar rétt?
Hvaða villur gera hinar?

Gunna fær rétt svar. Kata margfaldar ekki með 2 og Þuríður gleymir að margfalda saman 2 og 5.

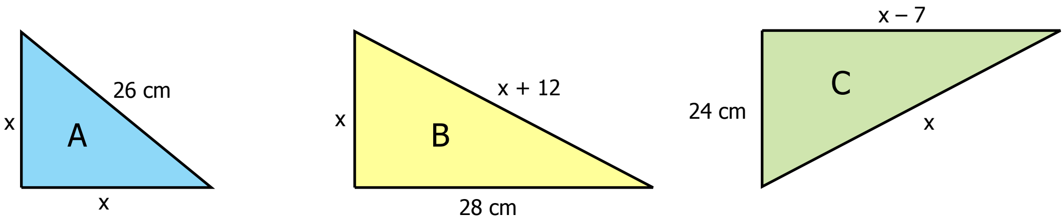
5. Kilja bókar er 700 kr. ódýrari en innbundin. Samanlagt kosta fjórar kiljur jafnmikið og þrjár innbundnar. Hvað kostar innbundin bók?

Kiljan kostar 2100 kr. og innbundin bók 2800 kr.

Jöfnur Pýþagórasar

1. Þegar þarf að finna hliðarlengdir rétthyrndra þríhyrninga með reglu Pýþagórasar er ekki víst að stærðir tveggja hliða séu þekktar. Stundum er aðeins lengd einnar hliðar þekkt og lengdir hinna hliðanna settar fram sem stæður. Kannaðu hvort þú getir fundið hliðarlengdir þessara þríhyrninga með því að notfæra þér reglu Pýþagórasar og algebrukunnáttu þína.

   a. Skráðu lengd óþekktra hliða með tveimur aukastöfum.

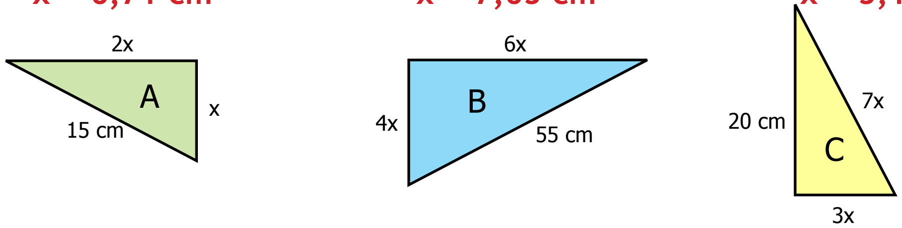


   b. Finndu ummál þríhyrninganna.
   c. Finndu flatarmál þeirra.

a. $x_A = 18,38$ cm $x_B = 26,67$ cm og $x_C = 44,64$ cm
b. $u_A = 62,76$ cm $u_B = 93,34$ cm og $u_C = 106,29$ cm
c. $F_A = 168,91\ cm^2$ $F_B = 373,38\ cm^2$ og $F_C = 451,68\ cm^2$

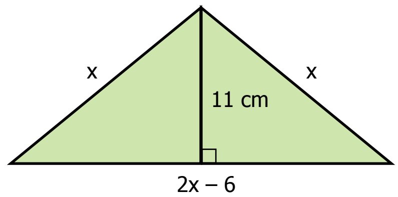
2. Finndu óþekktu hliðarlengdir rétthyrndu þríhyrninganna.

x = 6,71 cm **x = 7,63 cm** **x = 3,16 cm**



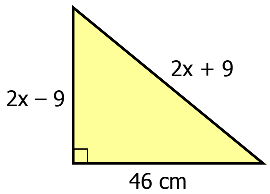
3. Jafnarma þríhyrningur er 11 cm á hæð. Finndu lengd grunnlínunnar og reiknaðu flatarmál þríhyrningsins.

x = 21,67 og F = 205,37 cm²



4. Hvert er ummál þessa rétthyrnda þríhyrnings? Svaraðu með tveimur aukastöfum.

x = 29,39 og u = 163,56 cm



Lausnir

Beinar línur 1

Allar línur má rita sem
$y = ax + b$

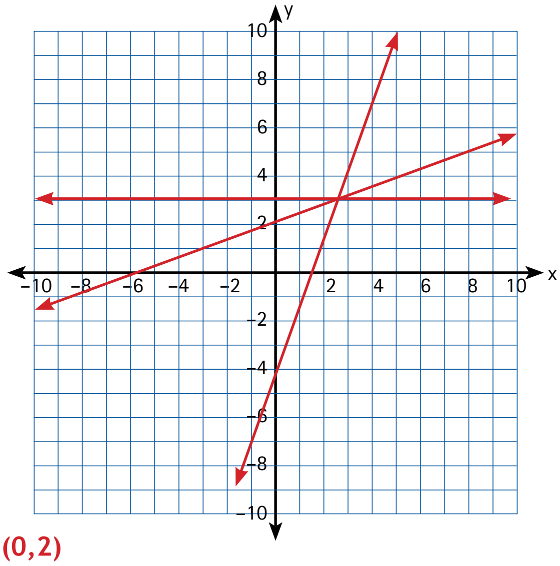
Gerðu gildistöflu og teiknaðu eftirfarandi línur í hnitakerfi.

$y_1 = 3x - 6$

$y_2 = 3$

$y_3 = \frac{1}{3}x + 2$

	A	B	C	D
1	x	3x-6	3	1/3x+2
2	-1	-9	3	1,67
3	0	-6	3	2
4	1	-3	3	2,33
5	2	0	3	2,67
6	3	3	3	3
7	4	6	3	3,33



a. Hallatala $y_1 = 3$, $y_2 = 0$ og $y_3 = \frac{1}{3}$

b. (3,3)

c. Skurðpunktur við y-ás y_1: (0,−6), y_2: (0,3) og y_3: (0,2)

d. Skurðpunktur við x -ás y_1: (2,0), y_2: ekki til og y_3: (−6,0)

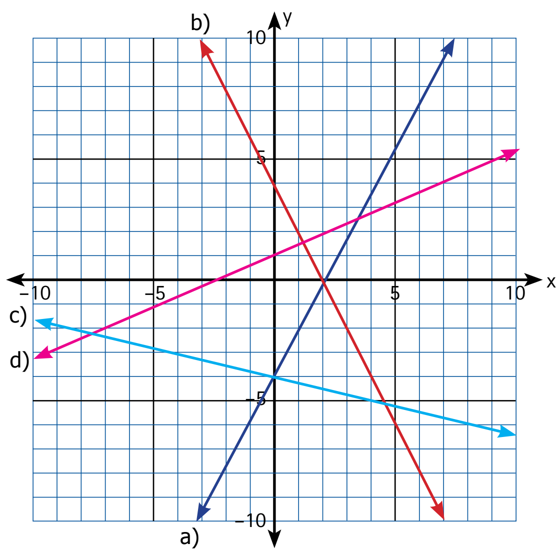
a. Finndu hallatölu línanna.

b. Hver er skurðpunktur línanna þegar x = 3? (3,3)

c. Hver er skurðpunktur línanna við y-ás? (0,2)

d. Hver er skurðpunktur línanna við x-ás? (−6,0)

2. Skráðu jöfnu línanna.



a. $y = 2x - 4$

b. $y = -2x + 4$

c. $y = -\frac{1}{4}x - 4$

d. $y = \frac{1}{2}x + 1$

3. Gerðu gildistöflu og teiknaðu línur á forminu $y = ax + b$ þegar:

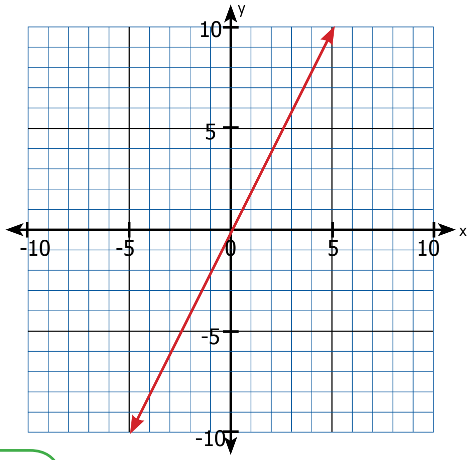
a. a = 3 og b = 1 $y = 3x + 1$

b. $a = \frac{1}{2}$ og b = 4 $y = \frac{1}{2}x + 4$

c. a = −1 og b = 3 $y = -x + 3$

d. a = −2 og b = −1 $y = -2x - 1$

Beinar línur 2



1. Teiknaðu graf jöfnunnar y = 2x − 1

a. Hver er hallatala línunnar?

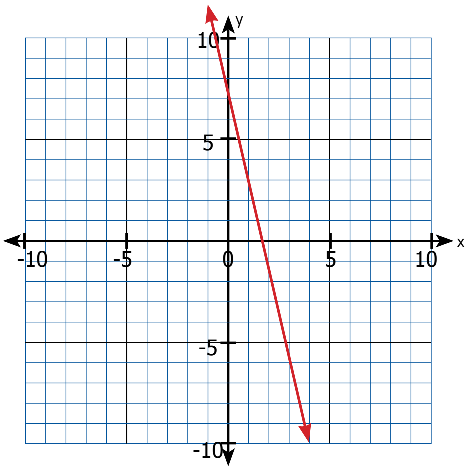
Sýndu hvernig þú getur reiknað hallatöluna með því að velja tvo punkta á grafinu og skrá hnit þeirra í regluna.

(0, − 1) og (1,1) hallatala $= \frac{1 - (-1)}{1 - 0} = 2$

$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ *þar sem a er hallatala og x og y hnit punktanna*

b. Hver er skurðpunktur línunnar við y-ás?

(0,− 1)



2. Teiknaðu graf jöfnunnar y = −3x + 6

a. Hver er hallatala línunnar?
Sýndu hvernig þú getur reiknað hallatöluna með því að velja tvo punkta á línunni.

b. Hver er skurðpunktur línunnar við y-ás?

a. (0,6) og (1,3) hallatala $= \frac{3 - 6}{1 - 0} = -3$

b. (0,6)

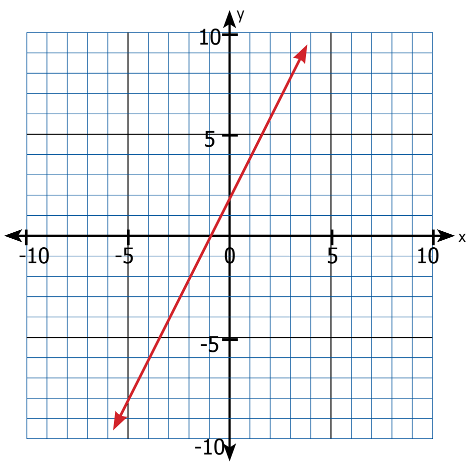
3. **a.** Reiknaðu hallatölu línu sem hefur punktana A(1,4) og B(3,8). $\frac{8 - 4}{3 - 1} = 2$

b. Finndu skurðunkt línunnar við y-ás? (0,2)

c. Skráðu jöfnu línunnar. y = 2x + 2

d. Gerðu gildistöflu og teiknaðu línuna í hnitakerfi.

Gildistafla x	2x + 2
−3	− 4
−2	− 2
−1	0
0	2
1	4
2	6
3	8



Beinar línur 3

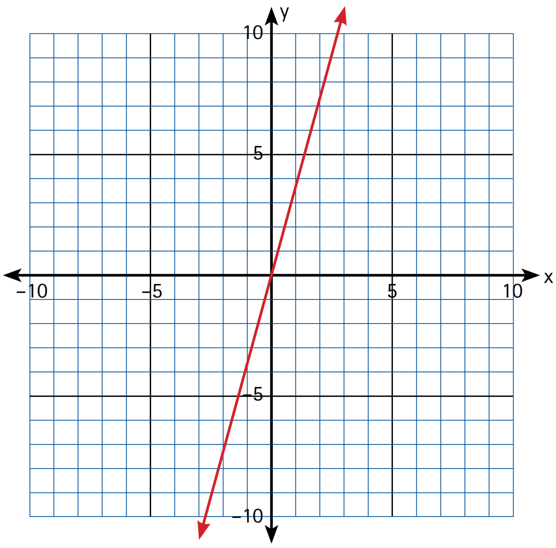
1. a. Reiknaðu hallatölu línu sem hefur punktana A(1,5) og B(3,13).
b. Finndu skurðunkt línunnar við y-ás?
c. Skráðu jöfnu línunnar.
d. Gerðu gildistöflu og teiknaðu línuna í hnitakerfi.

a. $\frac{13-5}{3-1} = 4$

b. (0,1)

c. 4x + 1

Gildistafla x	4x + 1
–3	– 11
–2	– 7
–1	– 3
0	1
1	5
2	9
3	13



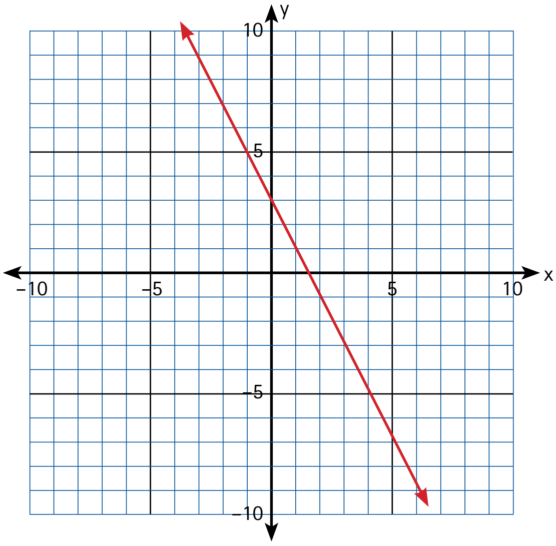
2. a. Reiknaðu hallatölu línu sem hefur punktana A(1,1) og B(3,–3).
b. Finndu skurðpunkt línunnar við y-ás?
c. Skráðu jöfnu línunnar.
d. Teiknaðu línuna í hnitakerfi.

a. $\frac{-3-1}{3-1} = -2$

b. (0,3)

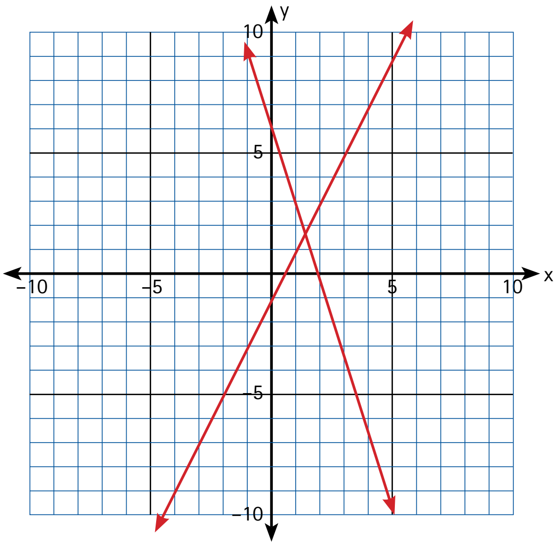
c. – 2x + 3

Gildistafla x	-2x + 3
–3	9
–2	7
–1	5
0	3
1	1
2	– 1
3	– 3



3. Lína hefur punktinn A(2,3) og hallatöluna a = 2. Finndu jöfnu línunnar og teiknaðu hana í hnitakerfi. y = 2x – 1

4. Lína hefur punktinn A(2,0) og hallatöluna a = –3. Finndu jöfnu línunnar og teiknaðu hana í hnitakerfi. y = – 3x + 6



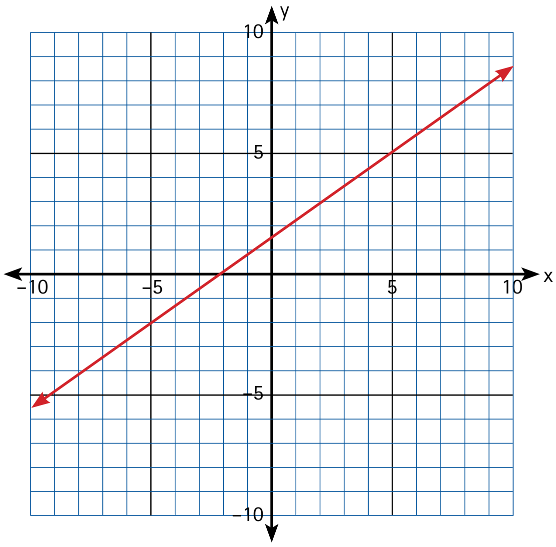
Lengd milli punkta á línu 1

1. Teiknaðu graf jöfnunnar $y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$

a. Finndu hnit punktanna A og B á línunni þegar $x_A = 2$ og $x_B = 10$. **A: (2,3) og B: (10,9)**

b. Finndu lengd á milli punktanna með því að nota fjarlægðarregluna

$d\ (\text{lengd}) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ $\quad \sqrt{(10-2)^2 + (9-3)^2} = 10$



2. Teiknaðu graf jöfnunnar $y = \frac{4}{3}x + \frac{8}{3}$

a. Finndu hnit punktanna A og B á línunni þegar $x_A = -2$ og $x_B = 1$. **A: (–2,0) og B: (1,4)**

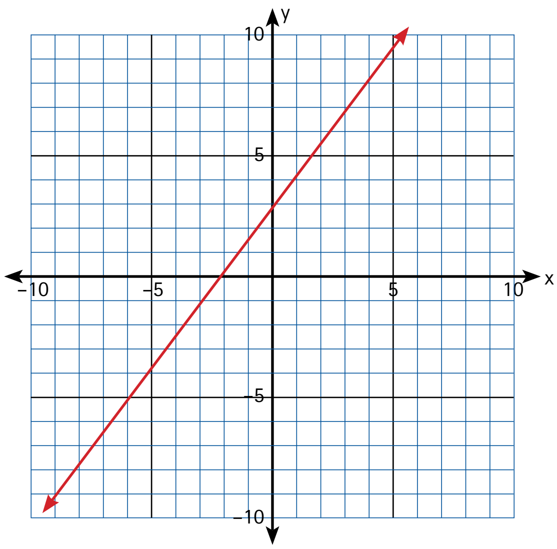
b. Finndu fjarlægð á milli punktanna. $\sqrt{(1-(-2))^2 + (4-0)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

c. Finndu einnig fjarlægð á milli punktanna B og C þegar $x_C = 4$.

$\sqrt{(4-1)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

d. Ætli sama fjarlægð sé á milli punktanna C og D þegar $x_D = 7$?

Já $\sqrt{(7-4)^2 + (12-4)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$



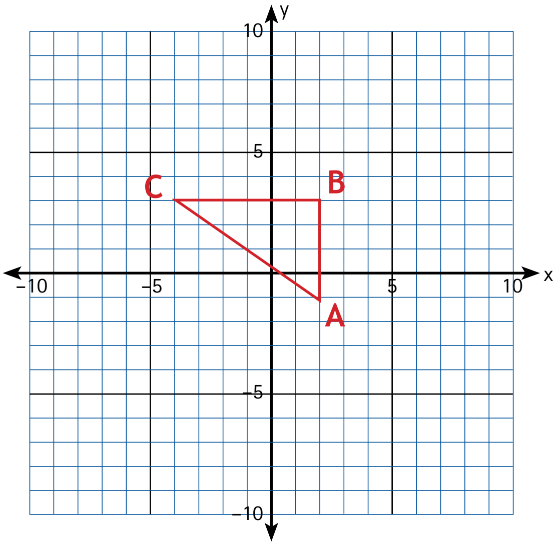
Lengd milli punkta á línu 2

1. Teiknaðu punktana A(2,−1), B(2,3) og C(−4,3) í hnitakerfi.
Dragðu línu milli punktanna. Er þríhyrningurinn rétthyrndur?

a. Finndu lengd línunnar AC með reglu Pýþagórasar. $\sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52} = 7{,}21$

b. Finndu lengd línunnar AC með fjarlægðarreglunni. $\sqrt{(-4 - 2)^2 + (3 - (-1))^2} = \sqrt{52} = 7{,}21$

Þríhyrningurinn er rétthyrndur.



2. Teiknaðu punktana A(2,3), B(8,1) og C(10,7) í hnitakerfi.
Dragðu línu milli punktanna. Er þríhyrningurinn rétthyrndur og jafnarma?

a. Reiknaðu lengd hliða þríhyrningsins til að kanna hvort hann sé jafnarma.

b. Notaðu reglu Pýþagórasar til að kanna hvort þríhyrningurinn sé rétthyrndur.

a. lengd AB $\sqrt{(8 - 2)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{40}$

lengd AC $\sqrt{(10 - 2)^2 + (7 - 3)^2} = \sqrt{80}$

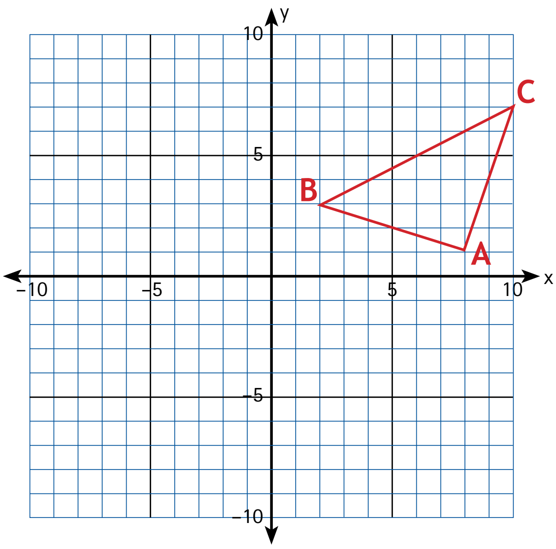
lengd BC $\sqrt{(10 - 8)^2 + (7 - 1)^2} = \sqrt{40}$

Þríhyrningurinn er jafnarma.

b. $(\sqrt{40})^2 + (\sqrt{40})^2 = (\sqrt{80})^2$ eða hallatala AB er $-\frac{1}{3}$ og hallatala BC er 3.

$3 \cdot (-\frac{1}{3}) = -1.$

Þríhyrningurinn er rétthyrndur.



Skurðpunktar

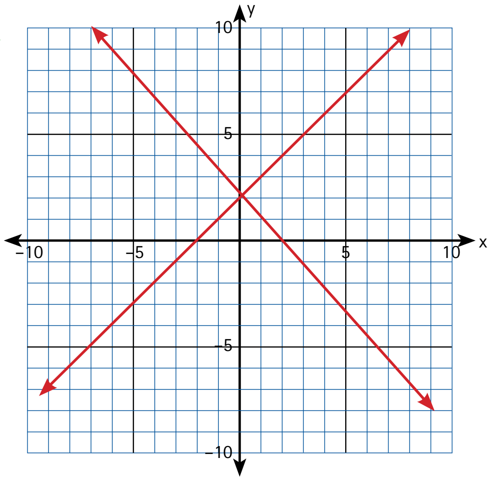
1. Teiknaðu eftirfarandi línur í hnitakerfi og finndu hvar þær skerast.

a. $y = x + 2$ og $y = -x + 2$ **Skerast í (0,2)**

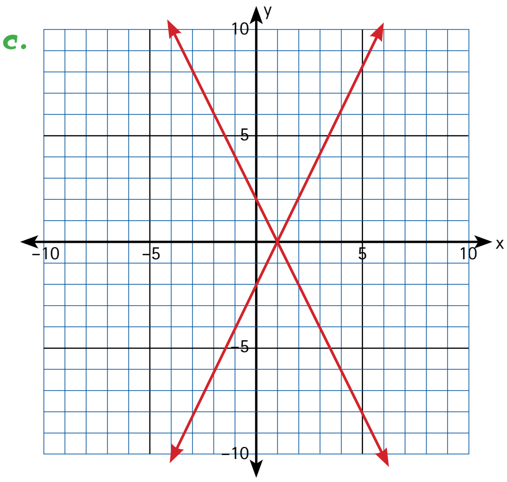
b. $y = 2x - 2$ og $y = -2x + 2$ **Skerast í (1,0)**

c. $y - x = 3$ og $2y - x = 6$ **$y = x + 3$ og $y = \frac{1}{2}x + 3$, þær skerast í (0,3)**

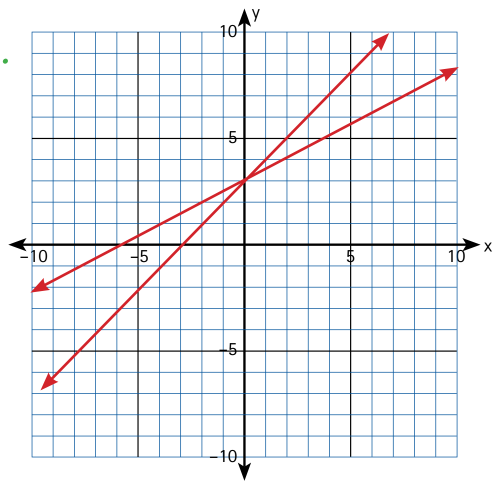
a.



c.



b.



Tvær línur sem ekki eru samsíða skerast í ákveðnum punkti, skurðpunkti. Þegar finna á skurðpunkt línanna þá er verið að leysa jöfnuhneppi. Það er hægt að finna skurðpunkt línanna með teiknilausn eins og dæmi er um hér að ofan þessi aðferð er ekki alltaf heppileg og oft betra að leysa saman tvær jöfnur með tveimur óþekktum stærðum með nákvæmari aðferðum.

Jöfnur með tvær óþekktar stærðir 1

$3 + 4 = 7$
$\underline{1 + 9 = 10}$
$4 + 10 = 17$

Með því að leggja saman jöfnurnar er hægt að láta annan lið jöfnunnar hverfa og þannig hægt að finna skurðpunktinn. Þessi aðferð er stundum nefnd samlagningaraðferðin.

1. Leggðu saman eftirfarandi dæmi og finndu x og y gildi þar sem það á við:

a.
$8 + 4 = 12$
$\underline{5 + 9 = 14}$
13 + 13 = 26

c.
$2x + y = 7$
$-\ \underline{2x + y = 3}$
x = 1 og y = 5

e.
$3x + 2y = 16$
$\underline{5x - 2y = 32}$
x = 6 og y = –1

b.
$16 + 5 =$
$\underline{25 - 8 = 17}$
41 – 3 = 38

d.
$x + 4y = 18$
$\underline{-x + 2y = 6}$
x = 2 og y = 4

f.
$4x + y = 15$
$\underline{3x - y = -1}$
x = 2 og y = 7

Með því að setja aðra jöfnuna inn í hina er verið að nota svokallaða innsetningu. Þá þarf að umskrá aðra hvora jöfnuna með því að einangra aðra óþekktu stærðina og setja hana inn í hina jöfnuna.

2. Finndu lausn á x og y með því að skeyta annarri jöfnuna inn í hina.

a.
$x = 8$
$y = x - 3$
y = 5

b.
$2y + x = 15$
$y = 2x$
x = 3 og y = 6

c.
$x = -3$
$2y + x = 15$
y = 9

3. Leystu jöfnupörin í dæmi 1. með samlagningaraðferðinni og innsetningu. Hvaða aðferð finnst þér best?

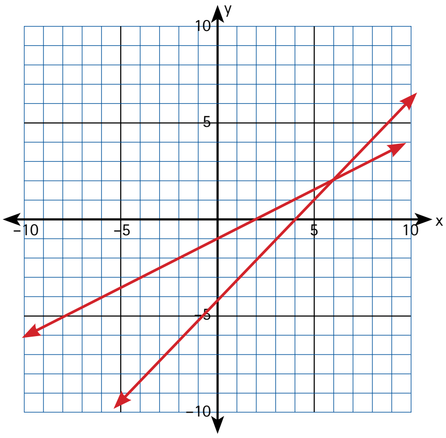
Jöfnur með tvær óþekktar stærðir 2

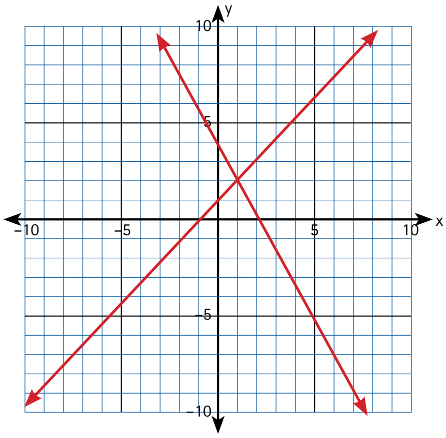
1. Teiknaðu eftirfarandi jöfnur og finndu sameiginlega lausn þeirra.

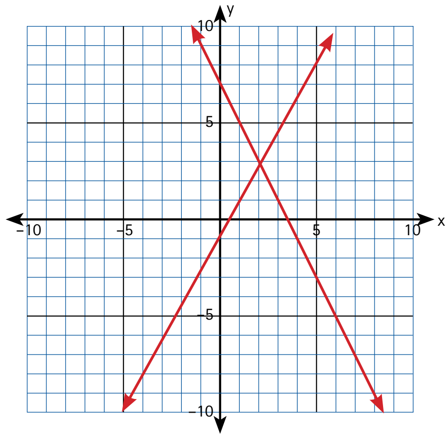
a. $x - y = 4$ og $2y = x - 2$ **$x = 6$ og $y = 2$ Skurðpunktur (6,2)**

b. $y = x + 1$ og $2x + y = 4$ **$x = 1$ og $y = 2$ Skurðpunktur (1,2)**

c. $2x + y = 7$ og $2y = 4x - 2$ **$x = 2$ og $y = 3$ Skurðpunktur (2,3)**

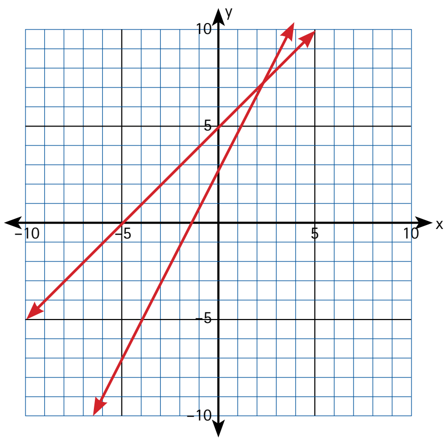






2. Finndu tvær jöfnur sem hafa skurðpunktinn (2,7) og teiknaðu þær í hnitakerfi.

Mismunandi svör, t.d. $y = 2x + 3$ og $y = y + 5$.

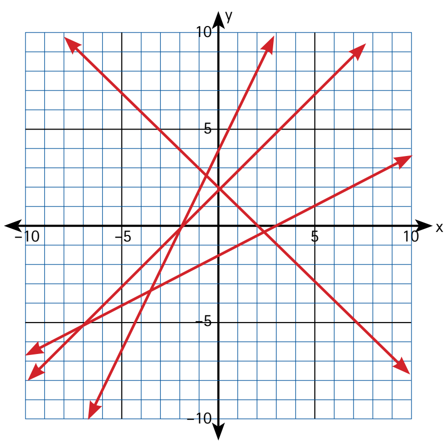


3. Teiknaðu jöfnuna $y = x + 2$ í hnitakerfi.
Finndu aðrar jöfnur og teiknaðu í hnitakerfi sem hafa skurðpunktana:

a. (0,2)
b. (−2,0)
c. (−7,−5)

Mismunandi svör

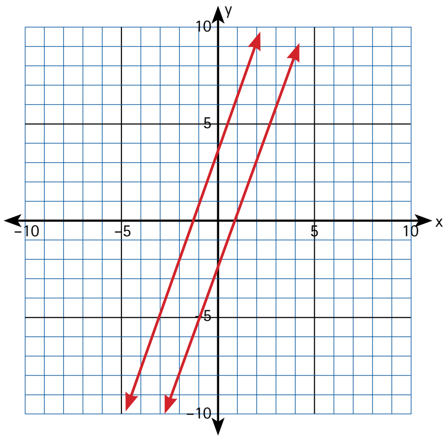
a. t.d. $y = -2x + 2$
b. t.d. $y = 2x + 4$
c. t.d. $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$



Jöfnur með tvær óþekktar stærðir 3

1. Hvenær hafa tvær jöfnur enga sameiginlega lausn? Teiknaðu dæmi.

Þegar jöfnur skerast ekki hafa þær enga sameiningleg lausn.
Því hafa jöfnur með sameiginlega hallatölu enga lausn, t.d.
$y = 3x + 4$ og $y = 3x - 2$



2. Leystu saman tvær jöfnur með því að nota samlagningaraðferð og lengingu annarrar jöfnunnar ef þess þarf. Finndu hnit skurðpunktanna.

a. $3x + y = 15$
$4x - y = 6$
(3,6)

c. $2x + 3y = 5$
$-4x + y = 11$
(−2,3)

b. $x - y = 3$
$x + 3y = 7$
(4,1)

d. $y = 2x - 3$
$3y = 5x - 7$
(2,1)

3. Notaðu innsetningu til að leysa saman jöfnurnar. Finndu hnit skurðpunktanna.

a. $y = 2x - 3$
$2x + y = 5$
(2,1)

c. $2x - y = 4$
$4x - y = 12$
(1,4)

b. $y = x + 3$
$3x + 2y = 11$
(4,4)

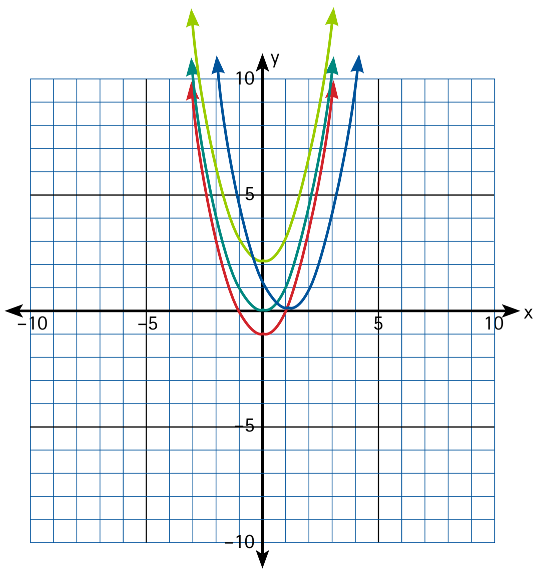
d. $2x - 3 = y$
$x + 2y = 4$
(2,1)

Annars stigs jöfnur

1. Teiknaðu jöfnuna $y = x^2$ í hnitakerfi.
Gerðu gildistöflu og skráðu skurðpunkta við x-ás og y-ás.

Gildistafla

x	x^2	$x^2 - 1$	$x^2 - 2x + 1$	$x^2 + 2$
-3	9	8	16	11
-2	4	3	9	6
-1	1	0	4	3
0	0	– 1	1	2
1	1	0	0	3
2	4	3	1	6
3	9	8	4	11



2. Teiknaðu jöfnuna $y = x^2 - 1$ í sama hnitakerfi og skráðu hvað er sameiginlegt og hvað ólíkt með gröfunum. Hvað heitir flutningurinn?
$y = x^2$ hefur eina núllstöð en $y = x^2 - 1$ hefur tvær. Hliðrun niður um einn.

3. Teiknaðu jöfnuna $y = x^2 - 2x + 1$ í sama hnitakerfi og skráðu eins og áður hvað er sameiginlegt og hvað ólíkt með gröfunum. Hvað heitir flutningurinn?
$y = x^2 - 2x + 1$ hefur eina núllstöð, (1,0). $y = (x - 1)^2$. Hliðrun um einn til hægri.

4. Hvernig breytist grafið ef sett er – fyrir framan jöfnurnar hér að ofan.
Hvað heitir slíkur flutningur?
Graf jöfnunnar snýr niður. Speglast um x-ásinn.

5. Teiknaðu jöfnuna $y = x^2 + 2$. Hvernig er hún ólík hinum jöfnunum?
Þessi jafna hefur enga núllstöð og sker því ekki x-ásinn.

6. Búðu til annars stigs jöfnu og berðu hana saman við jöfnuna $y = x^2$
Mismunandi svör.

7. Hvað geta annars stigs jöfnur átt margar núllstöðvar?
Enga, eina eða tvær núllstöðvar.

8. Teiknaðu jöfnuna $y = x^2 + 2x + 1$ í sama hnitakerfi og áður og berðu grafið saman við graf úr dæmi 3.
$y = x^2 + 2x + 1$ hefur eina núllstöð, (– 1,0). $y = (x + 1)^2$. Hliðrun um 2 til vinstri.

9. Hvað hefur jafnan $y = x^2 + 4x + 4$ margar núllstöðvar?
Eina, því rita má jöfnuna sem $(x + 2)^2$. Núllstöðin er (– 2,0).

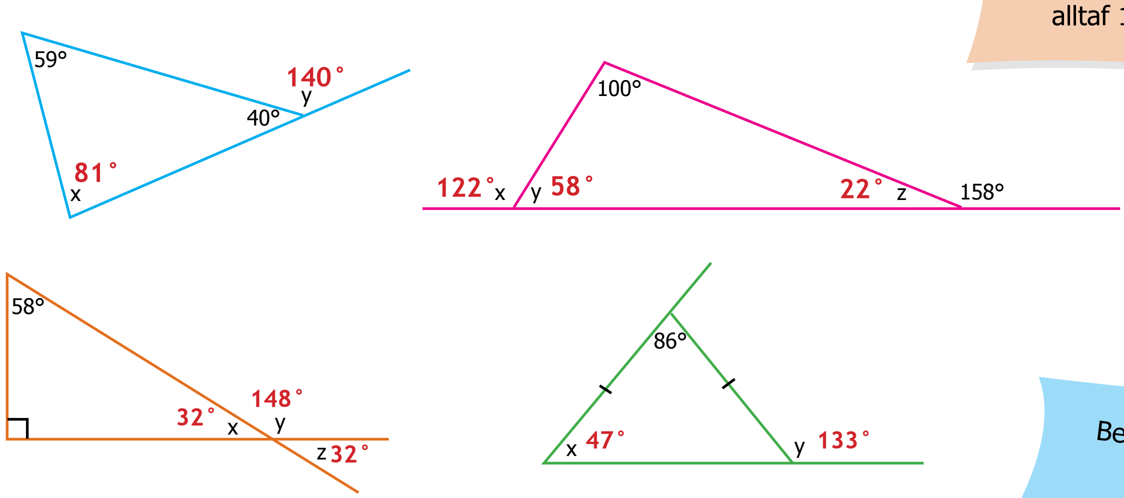
10. En jöfnurnar $y = (a + b)^2$ og $y = (a - b)^2$?
Eina.

Horn

Þegar finna á stærðir óþekktra horna á myndum eins og koma fyrir í eftirfarandi dæmum er nauðsynlegt að þekkja til nokkurra staðreynda. Þær eru t.d. að hornasumma þríhyrninga er alltaf 180°, bein lína er 180°, topphorn eru jafnstór og einslæg horn við samsíða línur eru jafnstór. Fleiri reglur eru til og gott getur verið að fletta þeim upp.

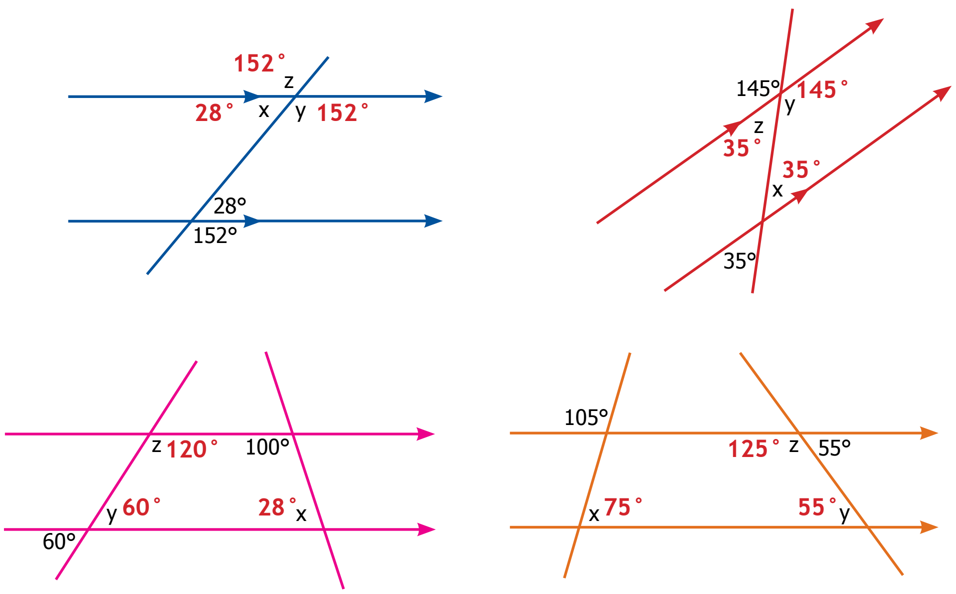
Hornasumma þríhyrninga er alltaf 180°.

1. Finndu stærðir allra óþekktu hornanna á myndunum.



Bein lína er 180°.

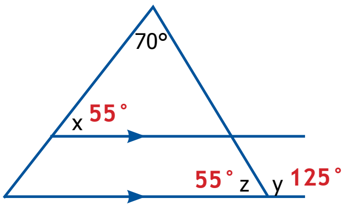
2. Finndu stærðir óþekktu hornanna á myndunum og notfærðu þér reglurnar sem nefndar voru efst á síðunni.



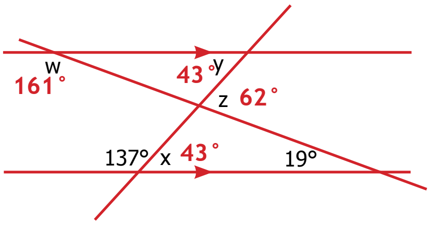
Topphorn eru jafnstór og einslæg horn við samsíða línur eru jafnstór.

Hornastærðir

1. Á myndinni sérðu jafnarma þríhyrning. Finndu stærð óþekktu hornanna á myndinni. Notaðu hinar ýmsu reglur um hornastærðir við lausnina.



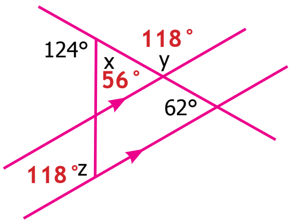
Hornasumma þríhyrnings er 180°.

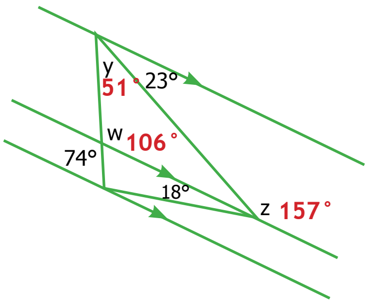


2. Hvað eru hornin x, y, z og w stór á myndinni?

Bein lína er 180°.

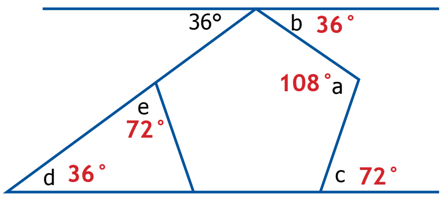
3. Finndu óþekktu hornin á myndunum.





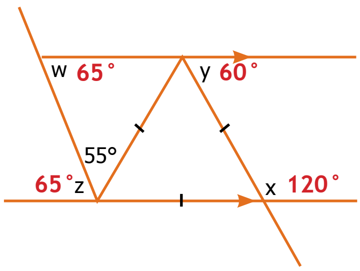
Einslæg horn við samsíða línur eru jafnstór.

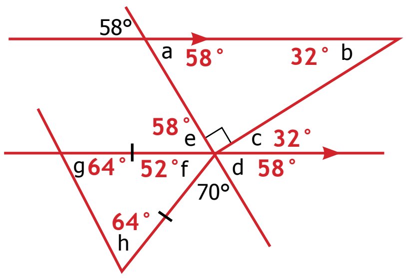
4. Á myndinni er jafnhliða fimmhyrningur í miðjunni, hver er stærð hornanna a – e á myndinni?



Topphorn eru jafnstór.

5. Hver er stærð merktu hornanna á myndunum?



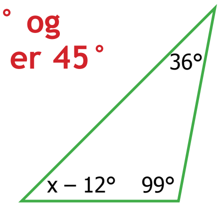


Hornastærðir – algebra

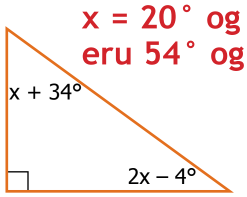
Í dæmunum hér fyrir neðan þarf að finna hornastærðir í þríhyrningum eða í öðrum flatarmyndum. Hornin eru mörg hver gefin upp sem stæður og reynir nú á að þekkja reglur hornafræðinnar og geta sett upp jöfnur til þess að leysa dæmin.

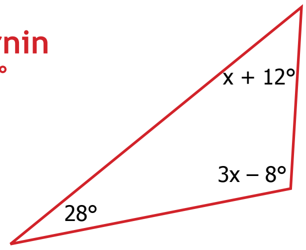
1. Finndu gildi x og óþekktu hornastærðirnar.

x = 57° og hornið er 45°



x = 20° og hornin eru 54° og 36°

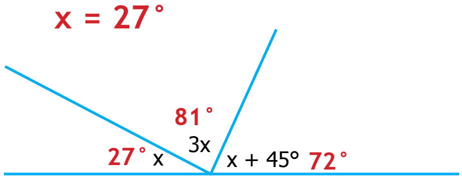




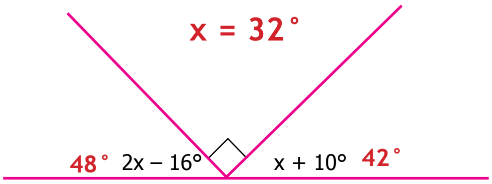
x = 37° og hornin eru 49° og 103°

2. Hvert er gildi x og hverjar eru stærðir óþekktu hornanna?

x = 27°

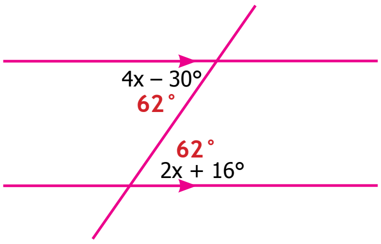


x = 32°

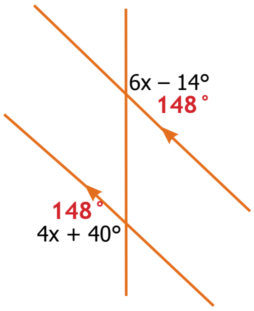


3. Finndu gildi x og stærðir óþekktu hornanna við samsíða línur.

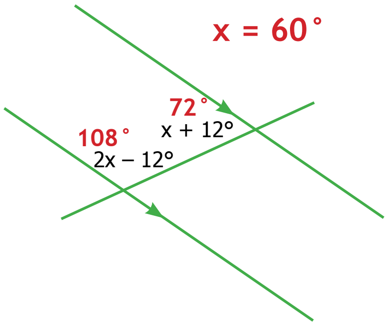
x = 23°



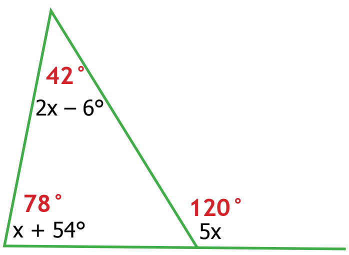
x = 27°



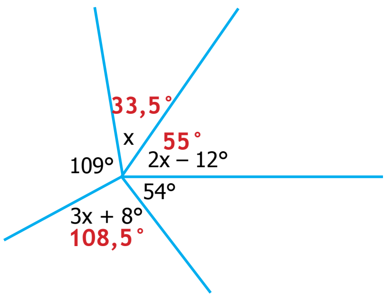
x = 60°



4. Hver er stærð óþekktu hornanna?



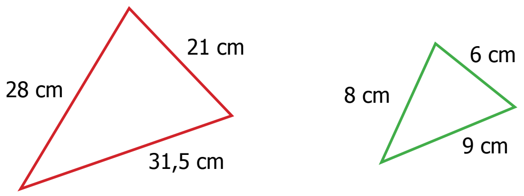
x = 24°



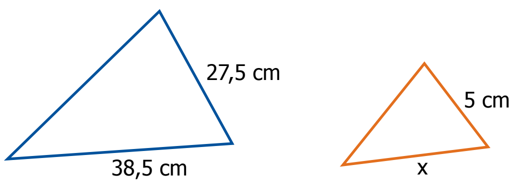
x = 33,5°

Einslögun

1. Hér eru tveir einslaga þríhyrningar. Kannaðu hvað einslægar hliðar stærri þríhyrningsins eru mörgum sinnum stærri en sambærilegar hliðar þess litla.
Útskýrðu hvernig þú finnur það út. **3,5 sinnum stærri.**

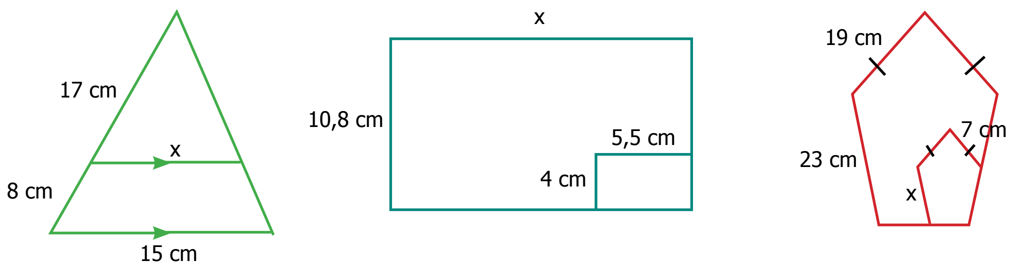


2. Þríhyrningarnir eru einslaga. Finndu lengd óþekktu hliðarinnar x. **x = 7 cm**

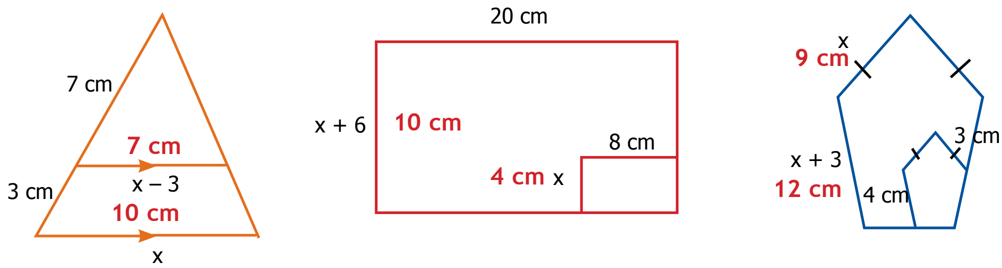


3. Þessir hyrningar eru einslaga. Finndu út lengdir óþekktu hliðanna.

x = 10,2 cm **x = 14,85 cm** **x = 8,47 cm**



4. Í þessum einslaga hyrningum eru stærðir tveggja hliðarlengda gefnar og svo hlutfallið milli hinna. Kannaðu hvort þú getir fundið lengd beggja óþekktu hliðanna.



Prósentur og vextir

1. Sóley, Hrannar, Tinna og Hafþór tóku að sér að ganga frá bókapöntunum hjá úgáfufélaginu BB. Þau ákveða að vinna öll eins og þau hafa tíma til og skipta síðan laununum eftir vinnuframlagi. Sóley vinnur í 20 klst., Hrannar 12 klst., Tinna 15 klst. og Hafþór 10 klst.

   a. Hvert verður vinnuframlag hvers fyrir sig í prósentum?
   b. Þau fá samtals 180 000 krónur fyrir verkefnið. Hvað fær hvert þeirra í sinn hlut?

   a. Sóley: 35%, Hrannar: 21%, Tinna: 26,3% og Hafþór 17,5%.
   Ath: Prósentutölurnar eru ekki námundaðar og eru því samtals 99,8%.
   Nemendur þurfa að taka afstöðu til þess hvernig þeir vilja haga námundun.
   b. Sóley: 63 000 kr., Hrannar: 37 800 kr., Tinna: 47 340 kr., og Hafþór: 31 500 kr.

2. Sóley leggur sinn hlut á bankareikning með13,45% vöxtum.
   a. Hver verður innistæðan með vöxtum eftir eitt ár? **71 474 kr.**
   b. Hver verður innistæðan eftir tvö ár? En eftir fimm ár? **Eftir eitt ár: 81 087 kr.**
   Eftir fimm ár: 277 301 kr.

3. Hafþór leggur 150 000 krónur inn á bankareikning með13,45% vöxtum. Eftir hve langan tíma verður upphæðin búin að tvöfalda sig?

   Eftir tæp 6 ár. Nánar tiltekið 5 ár og 6 mánuði.

4. Hrannar tekur 500 000 króna bankalán. Vextirnir eru 24%. Hvað þarf hann að borga mikið ef hann tekur lánið til eins árs? En ef hann borgar lánið eftir sex mánuði?

   Eftir árið 620 000 kr., eftir 6 mánuði 560 000 kr.

Prósentur og vextir 2

1. Tinna kaupir sér bíl á 680 000 kr. Hún greiðir 50 000 króna innborgun en tekur bílalán á 19% vöxtum fyrir afganginum. Hún ákveður að borga lánið með sex jöfnum geiðslum sem hún greiðir með vöxtum tvisvar á ári.

a. Hvað er lánið hátt? **630 000 krónur.**

b. Hvað þarf Tinna að geiða mikið í fyrstu afborgun eftir sex mánuði?

c. Hvað verður Tinna búin að geiða mikið samtals þegar hún er búin að greiða lánið og vextina?

b. 105 000 + 59 850 í vexti. Samtals 164 850 krónur.

c. 714 525 krónur.

2. Hefði verið ódýrara fyrir Tinnu að greiða mánaðarlegar afborganir með vöxtum? Hvað hefði hún borgað alls ef hún hefði borgað mánaðarlega 25 000 krónur af láninu. Reiknaðu. Notaðu töflureikni til að finna svarið.

Þetta verkefni hentar vel til að setja upp í töflureikni. Ein leið gæti verið þessi:

	Höfuðstóll	afborgun	vextir	til greiðslu
1	630 000	25 000	9975	34 975
2	605 000	25 000	9579,167	34 579,17
3	580 000	25 000	9183,333	34 183,33
25	30 000	25 000	475	25 475
26	5000	5000	79,16667	5079,167
27			130 704,2	760 704,2

3. Þegar Tinna tók lánið þurfti hún að greiða lántökugjald sem er 1% af láninu, stimpil-gjald sem er 1,5% af láninu og 1350 kr. í þinglýsingargjald. Reiknaðu hvað hún þurfti að borga mikið.

6300 + 9450 + 1350 = 17 100 kr.

Launaútreikningur

1. Tinna hefur 230 000 krónur í mánaðarlaun. Launaskattur er 37,72%, persónuafsláttur er 34 034 krónur. Lífeyrissjóðsgjald er 4% af laununum og stéttarfélagsgjald er 1,5%. Hver verða útborguð laun Tinnu? Fylltu út launaseðilinn.

Laun: **230 000 kr.**
Frádráttur alls: **65 372 kr.**
Útborguð laun: **164 628 kr.**

Stéttafélagsgjald: **3450 kr.**
Lífeyrissjóðsgjald: **9200 kr.**
Skattur: **86 756 kr.**
Persónuafsláttur: **30 034 kr.**
Skattur til greiðslu: **52 722 kr.**

2. Fylltu út launaseðilinn. Þú ákveður mánaðarlaunin og reiknar síðan frádrátt og útborguð laun. **Margar lausnir.**

Laun:
Frádráttur alls: ______
Útborguð laun: ______

Stéttafélagsgjald:
Lífeyrissjóðsgjald:
Skattur:
Persónuafsláttur:
Skattur til greiðslu:

Launaútreikningur 2

1. Mánaðarlaun starfsmanna í fyrirtæki eru: 150 000 kr., 205 000 kr., 270 000 kr. og 340 000 kr. Samið er um 12% launahækkun fyrir alla.
   a. Hvað verða launin há eftir launahækkun?
   b. Hvað verður launahækkunin í krónum mörg prósent af lægstu laununum?

a.	**168 000,**	**229 600,**	**302 400,**	**380 800**
b.	**12%**	**16,4%**	**21,6%**	**27,2%**

2. Hjá öðru fyrirtæki með sömu launaflokka var samið um 25 000 króna launahækkun á öll laun. Reiknaðu prósentuhækkunina á launaflokkana.

   16,66% 12,19% 9,25% 7,35%

3. Starfsmaður í verslun er beðinn að hækka vörur um 15%. Reiknaðu út nýja verðið.

   Fartölva 146 300 kr. **168 245 kr.**
   Leikjatölva 45 000 kr. **51 750 kr.**
   Sjónvarp 60 500 kr. **69 575 kr.**
   Grafísk reiknivél 10 500 kr. **12 075 kr.**

4. Ef vöruverðið er lækkað aftur um 15% hvert verður þá verðið? Útskýrðu hvers vegna vöruverðið verður ekki aftur það sama og fyrir hækkun.

   fartölva: 143 008 kr., leikjatölva: 43 988 kr.,
   sjónvarp: 59 139 kr., reiknivél: 10 264 kr.